Devoir maison de mathématiques n°5

Terminale S 21

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}+$ et dresser son tableau de variations

3. On admet que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}+$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,001.

4. Tracer la courbe Γ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Partie B.

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui à, tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0;+\infty[$

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui prend la valeur10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0;+\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

c) Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.