$1^{\text{ère}}$ S3

Devoir pour mercredi 14 mars 2012

I. L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques relations métriques dans un triangle rectangle (en dehors du théorème de Pythagore) en utilisant le produit scalaire.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

1°) Démontrer, en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, que l'on a : $BA^2 = BH \times BC$ (1).
Démontrer également que l'on a : $CA^2 = CH \times CB$ (2).

2°) Démontrer que l'on a: $AH^2 = HB \times HC$ (3) en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer que l'on a: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).

Indication : transformer le membre de droite en utilisant les relations (1) et (2) ; utiliser ensuite (3).

N.B.

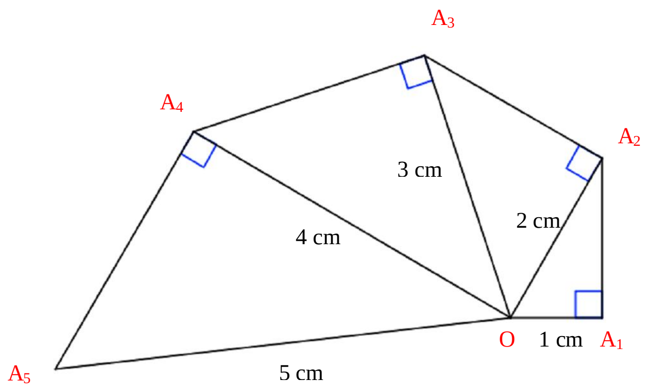
• Toutes les relations de cet exercice méritent d'être retenues par cœur ; il est fortement conseillé de faire une fiche.

• On peut également démontrer ces relations par d'autres méthodes :
- (1) et (2) avec les cosinus ;
- (1), (2), (3) avec les triangles semblables.

II. Voici le début d'une spirale construite de telle façon que :

– les longueurs : OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5 sont respectivement égales à 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm.
– les angles $\widehat{OA_1A_2}$, $\widehat{OA_2A_3}$, $\widehat{OA_3A_4}$, $\widehat{OA_4A_5}$ sont droits.

On tourne toujours dans le même sens.



1°) Exprimer en fonction de p la longueur $A_{p-1}A_p$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2°) On note L_n la longueur en centimètres de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ (c'est-à-dire de la ligne braisée constituée par les segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, … $[A_{n-1}A_n]$.

Choisir sans justifier parmi les sommes suivantes celle qui correspond à l'expression de L_n.

a. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{p}$ b. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p-1}$ c. $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \sqrt{2p-1}$ d. $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \sqrt{2p+1}$

On notera qu'il n'existe pas de formule sommatoire pour L_n.

3°) À l'aide de la calculatrice (en utilisant la fonction spéciale permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite), d'un tableur ou d'un logiciel de calcul formel, calculer la valeur arrondie à l'unité de la longueur en centimètres de la spirale $A_1A_2\ldots A_{25}$ (indiquer le moyen de calcul choisi ; dans le cas d'un logiciel de calcul formel préciser le nom).

4°) On se propose de déterminer le plus petit entier naturel n tel que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ dépasse 3 mètres.

a) Écrire un algorithme en langage naturel permettant de répondre à la question.
b) Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur ordinateur et en déduire la valeur cherchée.