Exercice 1.

Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel (S) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{array}\right.$$

où x, y, z sont trois fonctions de la variable t avec $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $z(0) = 3$.

1. Déterminer la matrice carrée d'ordre 3, A, telle que le système (S) soit équivalent à l'équation matricielle (E) :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3. On définit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont trois vecteurs propres de f.
   Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice $P^{-1}AP$.

5. Soit X le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ et (x_1, y_1, z_1) dans la base $\mathcal{B}_1$. Soit $\frac{dX}{dt}$ le vecteur de coordonnées $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   Montrer que

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \end{pmatrix}$$

6. En déduire que l'équation (E) est équivalente à (E_1) :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

   En déduire les fonctions x_1, y_1, z_1 de la variable t. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 2.

Soit p une constante réelle différente de -1 et -3.
Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système suivant d'inconnues (x, y, z) :

$$\left\{\begin{array}{l} (p-1)x - 2y + 2z = \frac{p}{p^2+1} \\ 2x + (p+3)y - 2z = \frac{1}{p^2+1} \\ -2x - 2y + (p+3)z = 1 \end{array}\right.$$