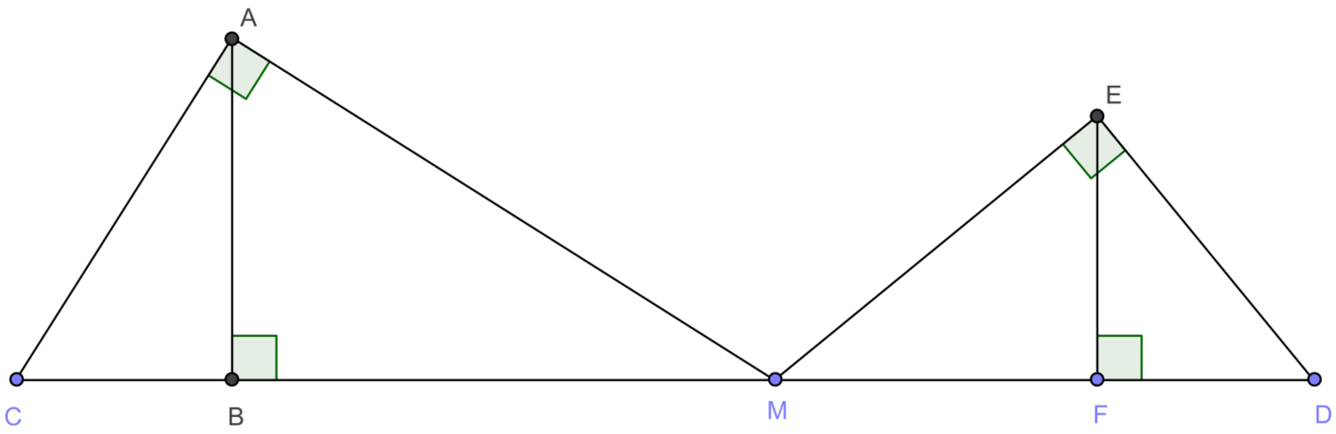
Un pont suspendu a une longueur totale CD de 6 km. Deux piliers [AB] et [EF] sont construits à 1 km de chaque extrémité du pont. Ces deux piliers sont attachés par un gros câble. Chaque pilier est attaché à l'extrémité du pont la plus proche [AC] et [ED], ainsi quand un point M situé sur la partie centrale du pont [AM] et [EM]. Pour des raisons techniques, le câble doit former deux triangles rectangles CAM rectangle en A et DEM rectangle en E.
L'architecte doit déterminer, où faut-il placer le point M pour que la somme des longueurs des hauteurs des piliers soit la plus grande possible pour rendre le pont le plus résistant possible.



Partie A : Avec une figure sur GeoGebra

1) Construire une figure à l'aide de GeoGebra ressemblant à la figure ci-dessus avec tous les points fixes et le point M mobile. Vous devrez bien remplir les conditions de l'énoncé et en particulier :

- la longueur du pont ainsi que la distance des piliers par rapport aux extrémités
- le triangle ABM est rectangle en B, EFD rectangle en F, CAM rectangle en A, DEM rectangle en E.

Pour vérifier que toutes les conditions sont vérifiées, déplacez le point M sur [BF], la hauteur des piliers doit varier mais les conditions ci-dessus doivent être en permanence vérifiées. Il faudra penser à une propriété du collège sur les triangles rectangles pour construire les points A et E.

2) Renommer « a » le segment [AB] et « b » le segment [EF]. Tapez dans la barre de saisie « s=a+b ». Déplacer le point M et proposer une solution au problème de l'architecte. On donnera la position ainsi que la somme des longueurs des hauteurs des piliers.

Partie B : Avec la courbe représentative d'une fonction sur GeoGebra

On pose BM = x.

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ?

2) En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ABC et ABM, démontrer que :

$$AC^2 + AM^2 = 2AB^2 + BM^2 + 1$$

3) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ACM, démontrer que :

$$AC^2 + AM^2 = x^2 + 2x + 1$$

4) Déduire des questions précédentes que $AB = \sqrt{x}$

5) En reprenant les question 2),3) et 4) dans d'autres triangles, montrer que $EF = \sqrt{4-x}$

6) On définit la fonction f qui à x associe la somme des longueurs des hauteurs des deux piliers du pont.
Donner l'expression de $f(x)$.

7) En représentant C_f la courbe représentative de la fonction f, et retrouver la solution du problème de l'architecte.
Vous expliquerez votre démarche. *On pourra utiliser l'icône* « Inspecteur de fonction ».