OBJECTIF BAC

34 Le but de cet exercice est de trouver une expression simple de la somme :

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

dans laquelle x désigne un réel et n un entier naturel non nul.

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. a. Calculer $S_3(1)$.

b. Calculer $f_5(-1)$.

2. a. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

b. Calculer $f_n(1)$.

3. a. Quel lien y a-t-il entre $S_n(x)$ et $f_n(x)$?

b. En déduire que pour tout $x \neq 1$:

$$S_n(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

4. Application : Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{k=1}^{100} k2^{k-1} = 99\times 2^{100}+1$$

Pensez à la somme des termes d'une suite géométrique de raison x.

Penser à la dérivée !

SE TESTER

1 Faux. En effet $2^3=8$ et $3^2=9$. L'inégalité est vraie pour tout entier naturel $n \neq 3$.

Il faut se méfier de la considération des premiers termes d'une proposition P_n.

2 Faux. Il suffit de choisir la suite définie par $u_n=(-1)^n$. Elle est bornée car pour tout entier $|u_n|\leqslant 1$. Cependant il n'existe aucun réel ℓ qui soit la limite de cette suite, car à partir de n'importe quel rang il y a des termes qui valent -1 et d'autres 1.

3 Vrai. En effet l'intervalle $]1{,}999\,;2{,}001[$ est un intervalle ouvert contenant 2. On utilise la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$ pour conclure.

4 Faux. Il suffit de choisir une suite qui zigzague vers $+\infty$ comme par exemple $u_n=n+(-1)^n$. Puisque pour tout entier naturel n, $n-1\leqslant u_n$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. D'autre part pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=(n+1)+(-1)^{n+1}-n-(-1)^n=1+(-1)^{n+1}-(-1)^n$$

Comme $-(-1)^n=(-1)^{n+1}$, on trouve $u_{n+1}-u_n=1+2\times(-1)^{n+1}$, qui vaut 3 ou -1 selon la parité de n. On en conclut que la suite n'est monotone à partir d'aucun rang.

5 Vrai. En effet si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) vers ℓ' alors (u_n+v_n) converge vers $\ell+\ell'$.

6 Faux. Si $u_n=(-1)^n$ et $v_n=(-1)^{n+1}$ alors $u_n+v_n=0$, ce qui donne une suite constante, donc convergente alors que (u_n) et (v_n) sont toutes les deux divergentes.

Pour la divergence de $(-1)^n$, voir l'exercice 2.

7 Faux. Il suffit de choisir $u_n=n+1$ et $v_n=-n$. On trouve $u_n+v_n=1$.

8 Faux. Il suffit de choisir $u_n=n$ et $v_n=\dfrac{1}{n}$. On trouve $u_n\times v_n=1$.

TRAITER UNE QUESTION DE COURS

9 Voir le paragraphe 4. C.

10 L'inégalité $(1+a)^n\geqslant 1+na$ est vraie si $n=0$ car $(1+a)^0=1$ et donc $(1+a)^0=1+0a$.