DM du père Noël

Avant de commencer, lire attentivement les pages 14 et 15 du polycopié de cours concernant les propriétés de la valeur absolue, puis la page 16 concernant la partie entière.

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \ln(|x| + x^2)$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$, puis que f est paire.
2. Simplifier les valeurs absolues lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Donner les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4. Étendre la tableau de variations de f à $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 Soit $g : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right)$

1. Justifier que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ puis montrer que g est impaire.
   ☞*On utilisera deux des règles de calcul du polycopié.*
2. Vérifier que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, g'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}$
   ☞*Distinguer absolument les cas $x > 1$ et $x < 1$ pour simplifier les valeurs absolues.*
3. Établir les limites de g en $+\infty$ et en 1, puis le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
4. Tracer la tangente de f en 0.
   ☞*Rappel : l'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$*
   Tracer la courbe de f sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ puis sur D_g

Exercice 3 Soit $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$

1. Déterminer D_h. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0.
2. Étudier la dérivée de h sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$
3. Étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h'(x)$
   ☞*Effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$*
   Le prolongement en 0 est-il dérivable ?
4. Étudier la limite de h en $+\infty$ et en $-\infty$
5. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la courbe de h sur $\mathbb{R}$.
7.