Si B est un sous-ensemble de X, un *recouvrement* de B est une famille $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de sous-ensembles de X, tels que $B \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$.

PROBLÈME

Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles. Pour chaque sous-ensemble H de l'intervalle $[1, n]$ de N, soient $P_H = \bigcup_{i\in H} X_i$ et $Q_H = \bigcap_{i\in H} X_i$. Soit $\mathfrak{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $[1, n]$ ayant k éléments; montrer que

$$\bigcup_{H\in\mathfrak{F}_k} Q_H \supset \bigcap_{H\in\mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{si } 2k \leqslant n+1$$

$$\bigcup_{H\in\mathfrak{F}_k} Q_H \subset \bigcap_{H\in\mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{si } 2k \geqslant n+1.$$

9. Ensembles dénombrables

Un ensemble X est dit *équipotent* à un ensemble Y, s'il existe une *bijection* de X sur Y. Il est clair que X est équipotent à X; si X est équipotent à Y, Y est équipotent à X; si X et Y sont tous deux équipotents à Z, X est équipotent à Y. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à l'ensemble des entiers N.

(1.9.1) *Tout sous-ensemble de l'ensemble* N *des entiers est fini ou dénombrable.*

Supposons que $A \subset N$ soit infini. Définissons par récurrence une application $n \to x_n$ de N dans A, de la façon suivante : x_0 est le plus petit élément de A, x_n est le plus petit élément de l'ensemble $A - \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, qui, par hypothèse, n'est pas vide. Ceci montre d'abord que $x_i \neq x_n$ pour $i < n$, et, par suite, $n \to x_n$ est injective; montrons de plus que $x_i < x_n$ pour $i < n$. Raisonnons par récurrence sur i, pour n fixé : on a $x_0 < x_n$ par définition de x_n, et, si on a démontré que $x_j < x_n$ pour $j < i$, alors $x_i \leqslant x_n$ par définition de x_i, et par suite $x_i < x_n$, puisque $x_i \neq x_n$. Puis, par récurrence sur n, on déduit immédiatement de la relation $x_i < x_n$ pour $i < n$, que n est inférieur ou égal à x_n pour tout n; par suite, si $a \in A$, nous avons $a \leqslant x_a$. Soit m le plus grand entier $< a$, tel que $x_m < a$; s'il existait un entier $b \in A$, tel que $x_m < b < a$, nous aurions $x_{m+1} \leqslant b < a$ par définition, ce qui est contradictoire avec la définition de m; par suite a est le plus petit élément de $A - \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, en d'autres termes