Fiche d'exercices 5 : Équations Différentielles

Exercice 1 (Equations différentielles linéaires du premier ordre)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + \dfrac{y}{x^2} = -\dfrac{1}{x^3}$

b) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$

c) $(1+x^2)y' - 4xy = 3x^2 - x^4$

d) $y' + 2y = e^x$

e) $y' - \dfrac{1+x^2}{x(x^2-1)}y = 2.$

f) $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $y' + 2y = xe^x + e^{-2x}.$

h) $y' - y = \sin x.$

i) $xy' + y = x^2 \ln x$

Exercice 2 (Equations différentielles linéaires du second ordre)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

j) $y'' + y' + y = \cos 2x$

k) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

l) $y'' - 2y' + 3y = x \cos x$

m) $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$

Exercice 3 (Equations différentielles non linéaires du premier ordre)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

n) $(1+y)y' = x - 1$

o) $2y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y' = 2\sqrt{y}. \qquad (1)$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une solution non nulle de (1).

a) Montrer que f est croissante.

b) Montrer que f s'annule en au moins un point α.

c) Montrer que si $f(\alpha) = 0$, alors $\forall x \leq \alpha, f(x) = 0$.

d) Montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f = 0$ sur $]-\infty, \alpha]$ et $f > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

e) Montrer que $f(t) = (t-\alpha)^2$ pour $t \geq \alpha$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'équation différentielle $(E) : y' = f(y)$ admet une solution ϕ définie sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.

Exercice 6. Déterminer les solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, de l'équation différentielle $(E) : yy'y'' = 0$.

Exercice 7 (Lemme de Gronwall)**.** Soient ϕ, ψ et f trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \psi(s) f(s) ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \phi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds.$$

Exercice 8. $(\star)$

a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \quad \lim_{t \to +\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0.$$

On suppose que $\Re(\alpha) > 0$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

b) Pour tout polynôme complexe $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré $n \geq 1$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on pose

$$P(D)(f) = a_n f^{(n)} + \ldots + a_1 f' + a_0 f.$$

Soit P un polynôme complexe de degré n. Montrer que l'on a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant $\lim\limits_{t \to +\infty} \Big[P(D)(f)\Big](t) = 0$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

(ii) Toutes les racines de P ont une partie réelle strictement négative.

Exercice 9. Soit l'équation différentielle $(E) : y''(t) + q(t)y(t) = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement négative sur $\mathbb{R}$. Montrer que la seule solution réelle de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.