

Exercice 2

① Restitution organisée des connaissances

On suppose connues les trois propriétés suivantes.

- ▶ Pour tous réels a et b , si $0 < a \leq 1$ et $0 < b \leq 1$ alors $0 < ab \leq 1$ (propriété 1).
- ▶ Pour tous réels a et b , si $1 \leq a$ et $1 \leq b$ alors $1 \leq ab$ (propriété 2).
- ▶ Pour tous réels α et β , on a l'équivalence : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$ (propriété 3).

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$f(b) - f(a) = (b - a) \left(\frac{ab - 1}{ab} \right).$$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$, puis sur l'intervalle $]0; 1]$.

c) Donner le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

② Le produit de deux nombres est égal à 1, déterminer ces deux nombres pour que leur somme soit minimale.