

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

- ❶ Montrer que, pour tout réel x strictement positif, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- ❷ Etudier les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a , avec $0 < a < 1$ (on ne cherchera pas à calculer a). Préciser le signe de g suivant les valeurs de x .
- ❸ Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- ❹ On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
 - a) Déterminer une équation de la tangente (T) à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.
 - b) Etudier la position de \mathcal{C} par rapport à (T) suivant les valeurs de x en montrant qu'elle dépend du signe de $\frac{(x-1)(x^2-1)}{x}$.
- ❺ Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe \mathcal{C} (on prendra $2/3$ comme valeur approchée de a).