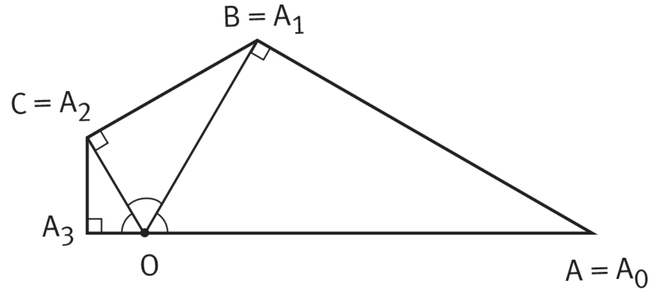
Exercice 2

On considère le triangle OAB rectangle en B, tel que $OA = 10$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = +\frac{\pi}{3}$.

À l'extérieur du triangle OAB, on construit le triangle OBC rectangle en C et tel que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = +\frac{\pi}{3}$.



On continue ce procédé de construction. On obtient ainsi une suite de triangles rectangles. On pose $A = A_0$, $B = A_1$ et on appelle A_n le sommet où il y a l'angle droit dans le n-ième triangle rectangle.

❶ Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = \left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}\right)$.

a) Quelle est la nature de la suite (α_n) ? Donner ses caractéristiques.

b) Calculer α_6. Que peut-on dire du point A_6 ? Quels sont les points A_n situés sur la demi-droite $[OA_6)$?

❷ Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = OA_n$.

a) Calculer d_0, d_1 et d_2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Donner ses caractéristiques.

b) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

c) Calculer la somme $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$ en fonction de n.

d) Exprimer A_nA_{n+1} en fonction de OA_n.

e) On pose $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_{n+1}$. En utilisant l'expression de S_n, déterminer L_n en fonction de n. Que pensez-vous du comportement de L_n quand n tend vers l'infini ?