Exercice 3

En admettant le résultat de la question ❶ c), la question ❷ peut être étudiée indépendamment de la question ❶.

❶ Soit n un entier naturel non nul.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par $f(x)=1+x+x^2+...+x^n$.

a) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;1[$, écrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient.

b) Justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;1[$ et donner deux expressions de $f'(x)$.

c) En déduire le calcul de la somme $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$ et en déduire que

$$x+2x^2+3x^3+...+nx^n=x\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;1[$.

❷ Alice lance une pièce bien équilibrée jusqu'au moment où elle obtient Pile pour la première fois.

Règle : Bob donne à Alice k € si Alice obtient Pile pour la première fois au k-ième lancer et le jeu s'arrête.

a) Un jeu est limité à une série de 5 lancers maximum, c'est-à-dire que le jeu s'arrête dès qu'Alice obtient Pile ou si Alice obtient cinq fois Face, et dans ce cas Alice ne reçoit rien.

On appelle X la somme reçue par Alice.
Avant de commencer à jouer, quelle somme (la mise) Alice devrait-elle donner à Bob pour que le jeu soit équitable ?

b) Maintenant le jeu est une série de n lancers.

Déterminer l'espérance de X et utiliser la question ❶ pour prouver que $\mathrm{E}(X)=u_n$ avec $u_n=2\left(1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

c) Utiliser une calculatrice ou un tableur pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n devient grand.

d) Dans le cas où le nombre de parties d'un jeu n'est pas limité, que pensez-vous de la mise ?