Exercice I

Pour quelles valeurs de a, b, c ∈ R la fonction f définie sur R par $f(x)=e^x$ si x < 0, et $f(x)=ax^2+bx+c$ si x ≥ 0, est-elle continue sur R ? De classe C^1 sur R ? De classe C^2 sur R ? De classe C^3 sur R ?

Exercice II

Montrer que la quantité suivante admet une limite finie l en +∞ et la calculer :

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^X$$

Donner un équivalent quand x tend vers +∞ de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^X-l$$

Exercice III

Considérons la fonction f définie sur R + par :

$$f(x)=\cosh(\sqrt{2x})$$

Est-elle de classe C^1 sur R+ ? Est-elle de classe C^2 sur R+ ?

Exercice IV

(1) Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b], deux fois dérivable sur]a, b[, telle qu'il existe $a\leq x_1<x_2<x_3\leq b$ satisfaisant

$$f(x_1)>f(x_2) \;\; et \;\; f(x_2)<f(x_3)$$

Montrer qu'il existe c ∈]a, b[tel que $f''(c)$ > 0.

(2) Soit g une fonction continue sur un intervalle [a, b], deux fois dérivable sur]a, b[, telle que g(a) = g(b) = 0 et $g''(x)$ ≤ 0 pour tout x ∈]a, b[. Montrer que pour tout x ∈]a, b[, g(x) ≥ 0.