

Exercice I

Montrer que la quantité suivante admet une limite finie l en $+\infty$ et la calculer :

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^X$$

Donner un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^X - l$$

Exercice II

(1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$, telle qu'il existe $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ satisfaisant

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f(x_2) < f(x_3)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) > 0$.

(2) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, $g(x) \geq 0$.