Exercice 7 On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par

$$\varphi(P) = (2X-1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P'.$$

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P.

   Indication : on pourra remarquer que $\varphi(P)$ n'est jamais de degré 3.

2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = 1$.

Exercice 10 Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$ deux réels distincts.

1. (a) Déterminer les degrés possibles du reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $X - a$.

   (b) Exprimer le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $X - a$ en fonction de $P(a)$.

   Indication : on pourra écrire formellement la division euclidienne et l'évaluer en a.

2. (a) Déterminer les degrés possibles du reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X - a)(X - b)$.

   (b) Exprimer le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$.

3. (a) Déterminer les degrés possibles du reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X - a)^2$.

   (b) Exprimer le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X - a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les restes des divisions euclidiennes de $X^n - X^{n-1} + X^2 - X + 1$ par $X + 1$, $X^2 - 1$ et $X^2 + 2X + 1$.