Je ne comprends pas bien la résolution de l'exercice suivant :

EXERCICE f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.
Pour tout nombre réel a, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = (-2a+1)x + a^2 + 6$$

Montrer que f admet un maximum en un nombre réel que l'on précisera.

La correction donnée par le professeur démarre ainsi :

Pour tout nombre réel a, $\boxed{f'(a) = -2a+1}$

Pouvez-vous expliciter ce point

Comment peut-il affirmer cela avec certitude d'après l'écriture

$$y = (-2a+1)x + a^2 + 6$$

d'après le cours la forme de l'équation de la tangente est $f'(a)(x-a) + f(a)$

La suite de la correction est quant à elle bien compréhensible

→ $f'(a)$ s'annule en $a = \frac{1}{2}$ en changeant de signe donc f admet en $\frac{1}{2}$ un extremum local

Sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$: $f'(a) \geq 0$ et sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ $f'(a) \leq 0$ donc il s'agit d'un maximum local égal $\boxed{à \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$

Pouvez-vous explicitez ce raisonnement.

Je vous remercie de me donner plus d'explications sur les 2 points ci-dessus.