Exercice N°1

Fonction Exponentielle $\underline{\underline{E(x) = e^x}}$

Equation tangente : $y = E'(a) \times (x-a) + E(a)$

on a

$E'(x) = e^x$, donc $E'(a) = e^a$

$y = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a) = \underline{\underline{T(x)}}$

Soit $H(x) = E(x) - T(x) = \underline{\underline{e^x - e^a x + (a-1)e^a}}$

Etudions $H(x)$

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $\lim_{-\infty} H(x) = +\infty$; $\lim_{+\infty} H(x) = +\infty$

c) $H'(x) = e^x - e^a \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x \geq a & H'(x) \geq 0 \\ \text{si } x \leq a & H'(x) \leq 0 \end{cases}$

5

Tableau de Variation

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	0	$+$	
$H(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

on déduit de ce Tableau que $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) \geq 0$

Donc $E(x) - T(x) \geq 0$, donc $E(x) \geq T(x)$

La Courbe représentative de la fonction Exponentielle se trouve donc toujours au dessus de sa tangente au point d'abscisse a.

Exercice N°2

f dérivable telle que $f(0)=1$

1) $f(x)+f'(x) \leq 0$ (1)

$g(x)=f(x)\,e^{x}$, donc $f(x)=g(x)\times e^{-x}$

$\cancel{\text{Donc } [g(x)\,e^{-x}]'}$

$g'(x)=[f(x)\,e^{x}]' = f'(x)\,e^{x} + f(x)\,e^{x}$

$= e^{x}\,(f'(x)+f(x))$

D'après (1), $g'(x) \leq 0$ (car $e^{x} \geq 0$ et $f'(x)+f(x) \leq 0$)

La fonction $g(x)$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. ②

$g(0)=f(0)\times e^{0} = 1\times 1 = 1$

Cela signifie donc que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq 1$ (car $g(x)$ décroissante)

Donc $f(x)\,e^{x} \leq 1$, donc $f(x) \leq e^{-x}$

2) Il faut poser $g(x)=f(x)\,e^{ax}$

$g'(x)=f(x)\times a\,e^{ax} + f'(x)\times e^{ax}$ ②

$= e^{ax}\,(a f(x)+f'(x))$

$a f(x)+f'(x) \leq 0$, donc $g'(x) \leq 0$, donc la fonction $g(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$g(0)=f(0)\times e^{a\times 0} = 1 \geq g(x)$ (car g décroissante)

Donc $f(x)\,e^{ax} \leq 1$, donc $f(x) \leq e^{-ax}$

3)

$g'(t)+0{,}01\,g(t) + h(t)\,g^{2}(t) = 0$

On peut donc écrire que

$$g'(t) + 0{,}01\, g(t) = -k(t)\, g^2(t).$$

$-k(t) \times g^2(t) \leq 0$, donc $\underline{\underline{g'(t) + 0{,}01\, g(t) \leq 0}}$

On peut donc écrire, d'après la question (2), que

$$g(t) \leq e^{-0{,}01 t}$$

(3)

$$g(t) \leq \frac{5}{100}\, g(0)$$

Donc il faut que $e^{-0{,}01 t} \leq \frac{5}{100} \times 1$

Donc $e^{0{,}01 t} \geq \frac{100}{5} = 20$

$$\ln\left(e^{0{,}01 t}\right) \geq \ln(20)$$

$$0{,}01 t \geq \ln(20)$$

$$t \geq 100 \times \ln(20).$$

$$t_0 = 100 \times \ln(20) = 299{,}57 \simeq \underline{\underline{300}}$$

(l'unité n'est pas précisée dans l'énoncé).