Devoir Maison mathématiques n°4. (1)

Partie A.

$g(x) = 2 + \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-x/2}$

1) a) $\lim\limits_{-\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right) = -\infty$ $\lim\limits_{-\infty} e^{-x/2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right) = +\infty$ $\lim\limits_{+\infty} e^{-x/2} = 0$

exp(x) est prédominant par rapport aux polynômes.

Donc $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-x/2} = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 2$

b) La fonction $e^{-x/2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ " " " "

g(x) est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} - 1/2 \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-x/2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} e^{(-x/2)} - 1/2 \, \frac{x}{2} \, e^{-x/2} + 1/2 \, e^{-x/2}$

$g'(x) = e^{(-x/2)} - \frac{x}{4} e^{(-x/2)} = e^{(-x/2)} \left(1 - \frac{x}{4}\right)$

c) Pour étudier la variation de g sur $\mathbb{R}$, il faut étudier le signe de sa dérivée.

②

$g'(x) \geqslant 0 \iff e^{(-x/2)}\left(1-\frac{x}{4}\right) \geqslant 0$

$\iff 1-\frac{x}{4} \geqslant 0$

$\iff \frac{x}{4} \leqslant 1 \iff x \leqslant 4$

Donc $g'(x) \geqslant 0$, si $x \leqslant 4$

et $g'(x) \leqslant 0$, si $x \geqslant 4$

$g(4) = 2 + \left(\frac{4}{2} - 1\right)e^{-2}$

$= 2 + \frac{1}{e^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2+\frac{1}{e^2}$ | $\searrow$ | $2$ |

2a) on sait que la solutn $\alpha$ se trouve dans l'intervalle $]-\infty, 4[$ car sur cet intervalle la fonctn $g$ est croissante en étant négative à l'infini et ~~positive~~ positive en 4.

$g(0) = 2 - 1 = 1$ $\quad g(-1) = 2 + (-3/2)e^{1/2} \simeq -0,47$

$g(-0,8) \simeq -0,088$ $\quad g(-0,7) \simeq 0,084$.

Donc $-0,8 < \alpha < -0,7$

3.) $\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } x \leqslant \alpha, & g(x) \leqslant 0 \\ \text{si } x \geqslant \alpha, & g(x) \geqslant 0 \end{array}}$

Partie B)

$f(x) = 2x - 5 - x e^{(-x/2)} = x\left(2 - e^{-(x/2)}\right) - 5$ 

1) a) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left(2 - e^{-(x/2)}\right) - \frac{5}{x}$

$= 2 - 0 - 0 = \underline{\underline{2}}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{+\infty} -5 - x e^{(-x/2)} = -5$

Donc $\Gamma$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ $\Delta$ d'équation

$\underline{\underline{y = 2x - 5}}$

En revanche en $-\infty$, $\Gamma$ n'admet pas d'asymptote oblique.

c) Soit $h(x) = f(x) - y(x)$

$h(x) = 2x - 5 - x e^{(-x/2)} - 2x + 5$

$h(x) = -x e^{-(x/2)}$

si $x \geq 0$ $h(x) \leq 0$ $\Rightarrow f(x) \leq y(x)$

si $x \leq 0$ $h(x) \geq 0$ $\Rightarrow f(x) \geq y(x)$

Donc

si $x \geq 0$ $\Gamma$ est au dessous de $\Delta$

si $x \leq 0$ $\Gamma$ est au dessus de $\Delta$

2) $f$ est une somme de fonctions dérivables, $f$ est donc dérivable.

$f'(x) = 2 - \left[e^{-x/2} - \frac{x}{2} e^{-x/2}\right]$

$= 2 + e^{-x/2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = g(x)$ (de la Partie A)

3) Dresser le Tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ $(-0,8 < \alpha < 0,7)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha) \simeq -5,41$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(-0,8) \simeq -5,406$ $\qquad$ $f(-0,7) \simeq -5,406$

5

4)

$f(-4) = 16,56$
$f(-3) = 2,44$
$f(-2) = -3,56$
$f(-1) = -5,35$
$f(0) = -5$
$f(1) = -3,61$
$f(2) = -1,73$
$f(5) = 4,58$
$f(8) = 10,85$