Partie A $\qquad f(x) = (20x+10)\,e^{(-1/2x)}$ ①

Γ : Courbe représentative.

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (20x+10)\,e^{(-x/2)} = \lim_{+\infty} \frac{20x+10}{e^{x/2}}$$

$\lim\limits_{+\infty} 20x+10 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} e^{x/2} = +\infty$

Hors $e^{x/2}$ est prédominant par rapport aux polynômes de degré n.

Donc $\underline{\underline{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0}}$

2) Etudier la variation de f sur $\mathbb{R}^+$ et dresser son Tableau de Variation.

$$f'(x) = 20\,e^{(-1/2x)} - 1/2\,(20x+10)\,e^{(-1/2x)}$$
$$= e^{(-1/2x)}\,[20 - 10x - 5]$$
$$= e^{-(x/2)}\,[15 - 10x]$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x/2}\,[15 - 10x] = 0 \Leftrightarrow 15 - 10x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3/2}}$

si $0 \leq x \leq 3/2$, $f'(x) \geq 0$

si $x \geq 3/2$, $f'(x) \leq 0$

Tableau de Variations.

x	0		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	$18{,}89$	$\searrow$	0

3) $f(x) = 10$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$. ②

D'après le Tableau de Variation (question 2), on sait que α est solution

et que α ~~est~~ supérieur strictement à $3/2$.

Calculons plusieurs valeurs.

$f(2) = 18{,}39397$ $f(5) = 9{,}0293$ $f(4) = 12{,}18$

$f(4{,}5) = 10{,}5399$ $f(4{,}6) = 10{,}2264$ $f(4{,}7) = 9{,}918$

$f(4{,}65) = 10{,}0716$ $f(4{,}67) = 10{,}0102$ $f(4{,}68) = 9{,}9795$

$f(4{,}675) = 9{,}9948$ $f(4{,}674) = 9{,}9979$ $f(4{,}673) = 10{,}0003$

Donc $4{,}673 < \alpha < 4{,}674$

4) $f(1) = 18{,}19$

$f(2) = 18{,}39$

$f(3)$

$f(5) = 9{,}02$

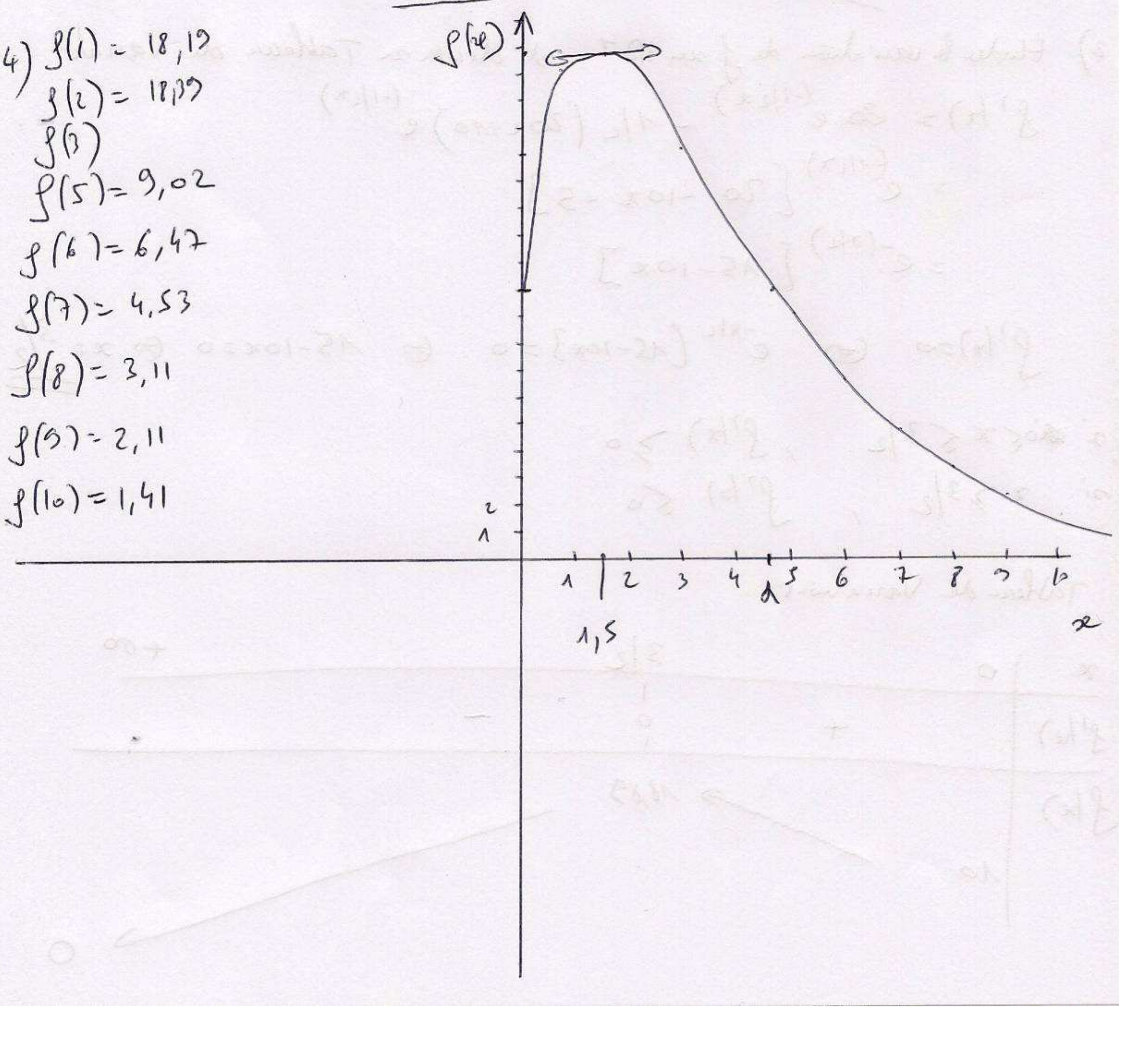
$f(6) = 6{,}47$

$f(7) = 4{,}53$

$f(8) = 3{,}11$

$f(9) = 2{,}11$

$f(10) = 1{,}41$



Partie B) $y(t)$ sur $[0, +\infty[$ $\qquad y' + \frac{1}{2} y = 20 e^{-t/2}$ (E).

1) Vérifier que f est solution de (E)

$$f'(x) = e^{(-x/2)} (15 - 10x) \qquad f(x) = (20x+10) e^{-x/2}$$

$$f'(x) + \frac{1}{2} f(x) = e^{(-x/2)} (15 - 10x) + (10x + 5) e^{(-x/2)}$$

$$= e^{(-x/2)} [15 - 10x + 10x + 5]$$

$$= 20\, e^{(-x/2)}.$$

Donc $f(x)$ est bien solution de (E).

2) a) $h = g - f$ avec g (solution de (E)) et f solution de (E).

$$h' + \frac{1}{2} h = (g - f)' + \frac{1}{2} (g - f)$$

$$= g' - f' + \frac{1}{2} g - 1/2 f.$$

$$= (g' + 1/2 g) - (f' + 1/2 f)$$

g est solution de (E), donc $g' + 1/2 g = 20 e^{-t/2}$

f est solution de (E), donc $f' + 1/2 f = 20 e^{-t/2}$

Donc $h' + \frac{1}{2} h = 20 e^{(-t/2)} - 20 e^{(-t/2)} = 0$

Donc h est bien solution de l'équation (E').

b) Résoudre (E').

$$y' + 1/2\, y = 0 \Leftrightarrow y' = -1/2\, y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -1/2\, y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -1/2\, dt.$$

$\frac{dy}{y} = -1/2 \, dt$ (4)

Donc $\int \frac{dy}{y} = \int -1/2 \, dt$

$\ln y = -1/2 t + \beta$ (où β est une constante)

Donc $y = a e^{-1/2 t}$ (où a est une constante).

On sait que $y(0) = g(0) - f(0) = 10 - 10 = 0 = a \times e^{-0/2} = a$

Donc forcément $a = 0$, donc $\underline{\underline{y = 0}}$

c) $y = 0$, donc $g - f = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{g = f}}$ cqfd

Donc f est l'unique solution de l'équation (E).

3) La Température initiale est 10° C.

D'après la partie A, la Température réatteindra 10°C au bout de 4,673 heures, soit à peu près. $\underline{\underline{280 \text{ minutes}}}$