Exercice n° 1

①

$a = 4 - 6i \qquad c = -2 + 8i$

$b = 2 + 2i$

1) $a - b + c = 4 - 6i - 2 - 2i - 2 + 8i$

$a - b + c = 0$

le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ $(B, -1)$ et $(C, 1)$ est donc l'origine $O = 0 + 0i = 0$. $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

3) Soit $M = x + iy$ d'affixe.

$\vec{MA} = 4 - 6i - x - iy = (4 - x) + i(-6 - y)$

$\vec{MB} = 2 + 2i - x - iy = (2 - x) + i(2 - y)$

$\vec{MC} = -2 + 8i - x - iy = (-2 - x) + i(8 - y)$

$\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (4-x) + i(-6-y) - (2-x) - i(2-y) + (-2-x) + i(8-y)$
$= (4-x) - (2-x) + (-2-x) + i(-6-y-2+y+8-y)$
$= (4-x-2+x-2-x) + i(-6-y-2+y+8-y)$
$= (-x) + i(-y)$
$= -x - iy$

$2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 2(4-x) - 2(2-x) + (-2-x) + i[-12-2y-4+2y+8-y]$
$= (8 - 2x - 4 + 2x - 2 - x) + i[-y]$
$= (2 - x) - iy.$

Donc $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (2-x)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} = 4 + \cancel{x^2} - 4x + \cancel{y^2} \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

F est une droite d'équation $x = 1$.

2) $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = -x - iy$

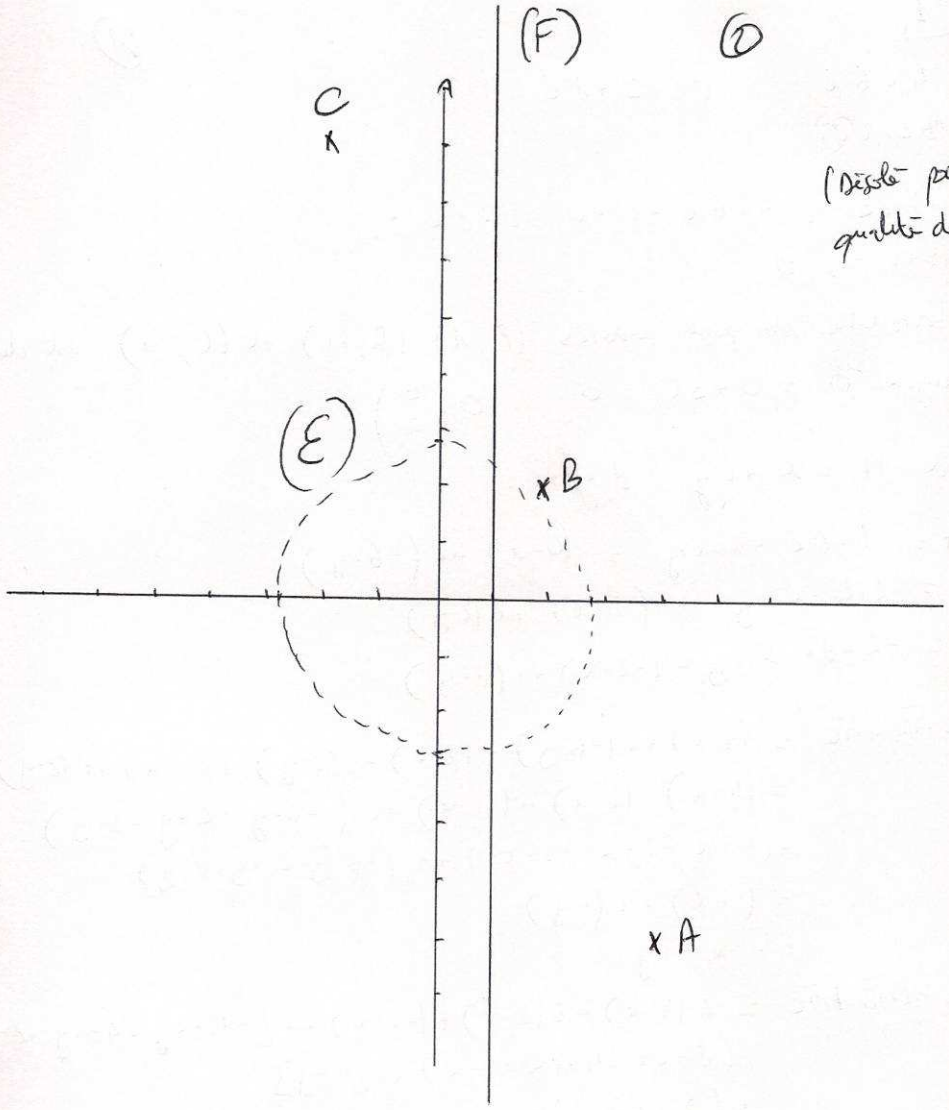
$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = -x - iy - \vec{MB} = -x - iy + (x-2) + i(y-2)$
$= -2 - 2i$

~~x^2+y^2~~ Donc $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8.$

$\mathcal{E}$ est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

4)



(Désolé pour la qualité des graphs)

Exercice n° 2 ③

$f(x) = \dfrac{9}{6-x}$ $\qquad D_f =]\cancel{6}\, -\infty, 6[$.

u_n : $u_0 = -3$ $\qquad u_{n+1} = f(u_n)$

1) Tracer la courbe.

$\lim\limits_{6^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = \dfrac{9}{(6-x)^2}$

Donc $\forall x \in D_f$, $f'(x) \geq 0$, la fonction f est donc croissante.

x	$-\infty$		6
$f'(x)$		$+$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

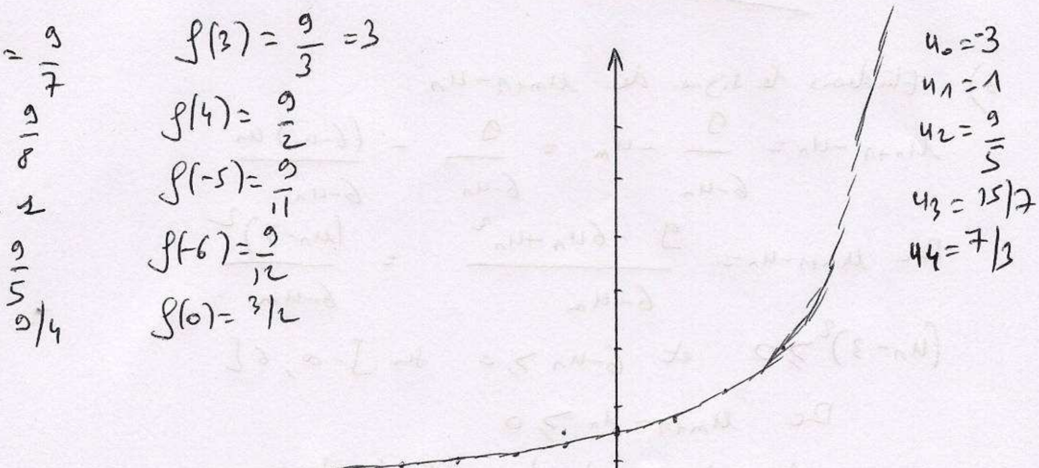
$f(-1) = \dfrac{9}{7}$ $\qquad f(3) = \dfrac{9}{3} = 3$

$f(-2) = \dfrac{9}{8}$ $\qquad f(4) = \dfrac{9}{2}$

$f(-3) = 1$ $\qquad f(-5) = \dfrac{9}{11}$

$f(1) = \dfrac{9}{5}$ $\qquad f(-6) = \dfrac{9}{12}$

$f(2) = 9/4$ $\qquad f(0) = 3/2$



$u_0 = -3$

$u_1 = 1$

$u_2 = \dfrac{9}{5}$

$u_3 = 15/7$

$u_4 = 7/3$

On peut dire que la suite u_n est croissante et sa limite éventuelle pourrait être 3.

4

2.) a.) si $x < 3$, alors $-x > -3$ donc

$6 - x > -3 + 6 = 3$, donc $6 - x > 3$

Donc $\frac{1}{6-x} < \frac{1}{3}$

Donc $\frac{9}{6-x} < \frac{9}{3} = 3$ Donc $\boxed{\frac{9}{6-x} < 3}$ cqfd.

À l'aide d'une démonstration par récurrence.

$u_0 = -3$ donc $u_0 < 3$

Supposons que $u_n < 3$, on a donc d'après le 2)a)

$\frac{9}{6-u_n} < 3$, donc $u_{n+1} < 3$ (car $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$)
cqfd.

Donc $u_n < 3$

b) Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - \frac{(6-u_n)u_n}{6-u_n}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6-u_n} = \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$.

$(u_n - 3)^2 \geq 0$ et $6 - u_n \geq 0$ sur $]-\infty, 6[$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite u_n est donc croissante

3) $V_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ (5)

a) on sait que $u_n < 3$, donc $u_n \in]-\infty, 3[$

Donc V_n est parfaitement défini.

b) $$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\left(\frac{9}{6-u_n}\right) - 3} - \frac{1}{(u_n - 3)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{6-u_n}{9 - 3(6-u_n)} - \frac{1}{(u_n-3)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{6-u_n}{9 - 18 + 3u_n} - \frac{1}{(u_n-3)}$$

$$= \frac{6-u_n}{3u_n - 9} - \frac{1}{(u_n-3)}$$

$$= \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{1}{(u_n-3)}$$

$$= \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{3}{3(u_n-3)}$$

$$= \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{-1 \times (u_n-3)}{3 \times (u_n-3)} = -1/3$$

Donc $V_{n+1} - V_n = -1/3$

V_n est donc une suite arithmétique de raison $-1/3$

c) $V_n = V_0 + n \times r$ (avec $r = -1/3$) ~~et $V_0 = -1/6$~~ 6

$$V_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-3-3} = -1/6.$$

Donc $V_n = -1/6 - \dfrac{n}{3}$

$$\frac{1}{u_n - 3} = -1/6 - \frac{n}{3} = \frac{-1-2n}{6} = -\frac{(1+2n)}{6}$$

Donc $u_n - 3 = \dfrac{-6}{(1+2n)}$

Donc $u_n = \dfrac{-6}{(1+2n)} + 3 = \dfrac{-6+3(1+2n)}{(1+2n)}$

$$u_n = \frac{-6+3+6n}{(1+2n)} = \frac{6n-3}{2n+1}$$

$$\lim_{+\infty} u_n = \frac{6}{2} = 3$$