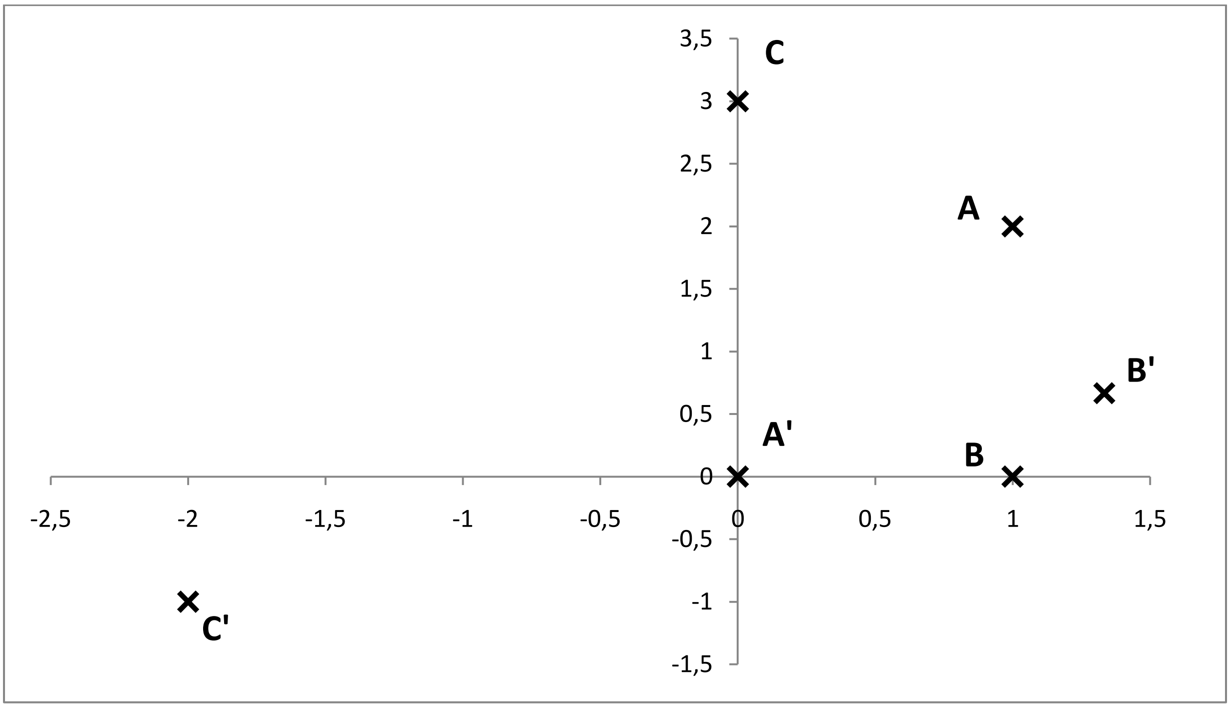
Exercice1

1) Déterminer les affixes et placer les points

$$z_A = 1 + 2i \Longrightarrow z'_A = 0$$

$$z_B = 1 \Longrightarrow z'_B = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$z_A = 3i \Longrightarrow z'_C = -2 - i$$



2) Déterminer partie réelle et partie imaginaire

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

$$z = x + yi \text{ et } \bar{z} = x - yi$$

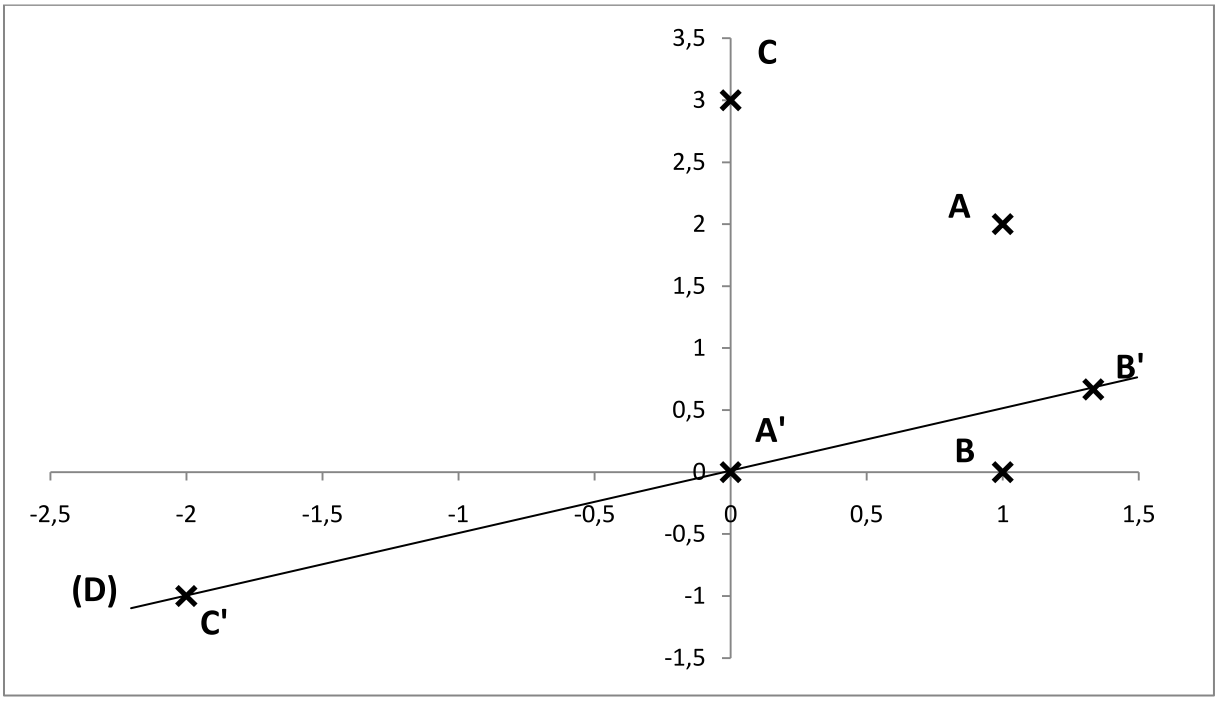
$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6} = \frac{(3+4i)(x+yi) + 5(x-yi)}{6}$$

$$= \frac{2(2x-y)}{3} + \frac{2x-y}{3}i = \frac{2x-y}{3}(2+i)$$

$$Partie\ réelle = \frac{2(2x-y)}{3}$$

$$Partie\ imaginaire = \frac{(2x - y)}{3}$$

3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.



Il faut résoudre l'équation

$$z' = z$$

soit

$$\frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6} = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 2y}{3}(1 + 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0$$

donc

$$y = \frac{1}{2}x$$

A', B' et C' appartiennent à la droite (D), ils sont donc invariants par f

4) Montrer que M’ appartient à (D)

La droite (D) est définie par

$$y = \frac{1}{2}x$$

alors $\frac{1}{2}x_{M'} = y_{M'}$.

M’ $\left(\frac{2(2x-y)}{3}, \frac{(2x-y)}{3}\right)$

$$\frac{y_{M'}}{x_{M'}} = \frac{\frac{(2x-y)}{3}}{\frac{2(2x-y)}{3}} = \frac{1}{2}$$

Pour tout point M, M’ est invariant par f

5)

a)

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{\frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6} - z}{1+2i} = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z} - 6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z + 5\bar{z}}{6(1+2i)}$$

$$= \frac{(1-2i)}{(1-2i)} \frac{(-3+4i)z + 5\bar{z}}{6(1+2i)} = \frac{(5z + 5\bar{z}) + i(10z - 10\bar{z})}{6 \times 5}$$

$$= \frac{(z+\bar{z})}{6} + i\frac{(z-\bar{z})}{3}$$

Pour $z = x + yi$

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(z+\bar{z})}{6} + i\frac{(z-\bar{z})}{3} = \frac{(x + yi + x - yi)}{6} + i\frac{(x + yi - x + yi)}{3}$$

$$= \frac{(x + yi + x - yi)}{6} + i\frac{(x + yi - x + yi)}{3}$$

$$= \frac{(x + yi + x - yi)}{6} + i\frac{(x + yi - x + yi)}{3}$$

$$= \frac{(x-2y)}{3} \in \mathbb{R}$$

donc $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel pour tout z.

b) Soit $M \neq M'$, $\frac{z'-z}{z_A}$ étant réel alors

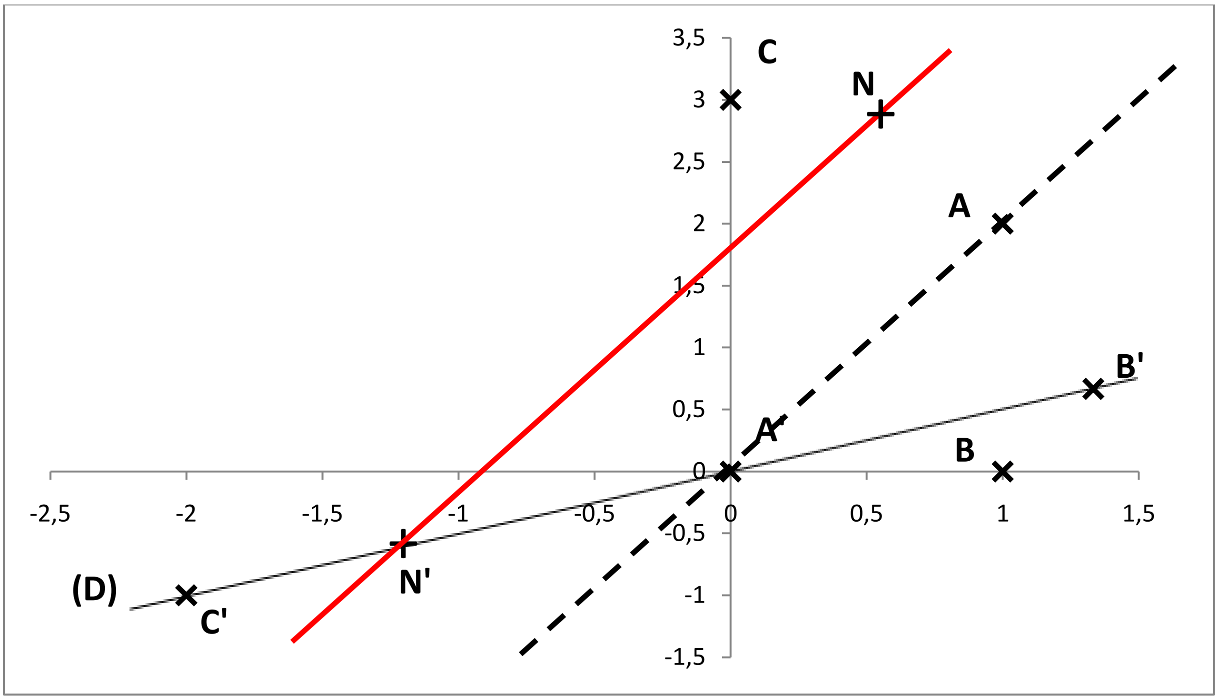
$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\frac{z'-z}{z_A - 0}\right) = 0$$

Ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires.

6) Soit N, un point quelconque du plan.

- N appartient à (D), on se trouve dans le cas de figure démontré partie 3) qui montre que $N = N'$.

- N n'appartient pas à (D), alors $N \neq N'$ (partie 3)). La partie 4) montre que N' appartient à (D). N' est l'intersection entre (D) est la droite passant par N et parallèle à OA.



Exercice2

1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{5^n} = \frac{5 \times 5^n}{(n+1) \times n!}\frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}$$

2) La suite u_n est décroissante si $u_n > u_{n+1}$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow n_0 > 4$$

La suite u_n est décroissante pour $n_0 > 4$.

3) Montrer que pour tout entier supérieur ou égal à 5, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{5}{6}$

Soit

$$n \geq 5$$

$$\Leftrightarrow n + 1 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} \geq \frac{5}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

4)

Limite supérieure :

Soit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{5}{6} u_n$$

Pour n>5

$$u_6 \leq \frac{5}{6} u_5$$

$$u_7 \leq \frac{5}{6} u_6 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} u_5 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 u_5$$

$$u_8 \leq \left(\frac{5}{6}\right)^3 u_5$$

$$\vdots$$

$$u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} u_5$$

Limite inférieure de u_n

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} u_5\right)$$

Sachant que u_5 est constant et $\frac{5}{6} < 1$ est donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} u_5\right) = 0$$