Exercice n°1

$\forall n \geq 1$, sur $I = [0,1]$

$$f(x) = -e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

1) $f'(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) - e^{-x}\left(1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$

$$= e^{-x} \times \frac{x^n}{n!}$$

2) $0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{n!} \leq 1$

D'autre part

$0 \leq x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1$

Donc $0 \leq \frac{x^n e}{n!} \leq 1 \quad \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 1$ cqfd

3) $0 \leq f'(x) \leq 1$, donc $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $[0,1]$, donc $f(0) \leq f(1)$

4) $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

$g'(x) = f'(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$$g'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)}\left[\frac{x}{n} + e^{-x} - 1\right]$$

sur $[0,1]$, $\frac{x e^{-x}}{n} \leq 1$ Donc $g'(x) \leq 0$

La fonction g est donc décroissante sur $[0,1]$

Donc $g(0) \geq g(1)$

Donc $f(0) \geq f(1) - \frac{1}{n!}$, donc $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$

5) $f(0) = -1$

$f(1) = -e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

Donc $-e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq -1 + \frac{1}{n!}$ $\left(\text{car } f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}\right)$

$\Leftrightarrow -\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq e\left(-1 + \frac{1}{n!}\right)$

$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \geq e\left(1 - 1/n!\right)$

$\Leftrightarrow e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ (1)

et $-e^{-1}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \geq -1$ $\left(\text{car } f(1) \geq 0\right)$

Donc $e^{-1}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq 1$

Donc $\left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq e$ (2)

~~Donc~~

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e}}$

6) On pose $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

On a donc $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq u_n \leq e$

Donc $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq u_n$ et $u_n \leq e$

Donc $e - u_n \leq \frac{e}{n!}$ et $e - u_n \geq 0$

Donc $0 \leq e - u_n \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}$ $\left(\text{car } e \simeq 2{,}71\right)$

7) $\lim_{+\infty} n = +\infty$

Donc $\lim_{+\infty} n! = +\infty$

Donc $\lim_{+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ donc $\underline{\underline{\lim_{+\infty} \frac{3}{n!} = 0}}$

8) $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n!}$

Donc $0 \leq \lim_{+\infty} (e - u_n) \leq \lim_{+\infty} \frac{3}{n!}$

Donc $0 \leq \lim_{+\infty} (e - u_n) \leq 0$

Donc $\lim_{+\infty} (e - u_n) = 0 \iff \underline{\underline{\lim_{+\infty} u_n = e}}$

Pq $e - u_n \leq 10^{-4}$, il faut que $\frac{3}{n!} \leq 10^{-4}$, donc il faut que $n! \geq 3 \times 10^4 = 30000$

$7! = 5040$ et $8! = 40320$

Donc $\underline{\underline{n_0 = 8}}$

9) ??

Exercice 2

Dans $\mathbb{C}$, $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ (E)

On pose $f(z) = z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1$

$f(0) = 1 \neq 0$, donc 0 n'est pas solution de (E)

1) Remplaçons u par $z + \frac{1}{z}$ dans l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 5z - \frac{5}{z} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 5z - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{z^4 - 5z^3 - 5z + 1 + 6z^2}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

cqfd

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

Donc $u_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$

et $u_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$

3) $z_1 + \frac{1}{z_1} = u_1 \Leftrightarrow z_1 + \frac{1}{z_1} = 4 \Leftrightarrow z_1^2 + 1 = 4z_1$

$\Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 + 1 = 0$

$\Delta_1 = 16 - 4 = 12$ $\quad z_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

ou $z_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$z_2 + \frac{1}{z_2} = u_2 \Leftrightarrow z_2^2 - z_2 + 1 = 0$ $\quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ //

$\Delta_2 = 1 - 4 = -3$

ou $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ //

4) Les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont donc

$2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$; $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$