1) les points M, G, I et G' sont alignés (1)

2) a) $\vec{MN} = \vec{NA'}$

$= \vec{NB} + \vec{BA'}$

$= \frac{1}{2}\vec{CB} + \vec{BA'}$

$= \frac{1}{2}\vec{CA'} + \frac{1}{2}\vec{A'B} + \vec{BA'} = -\frac{1}{2}\vec{A'B} - \frac{1}{2}\vec{A'C}$

et $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{MA'}$

Donc $\frac{1}{2}\vec{MA'} = -\frac{1}{2}\vec{A'B} - \frac{1}{2}\vec{A'C}$

Donc $\frac{1}{2}\vec{A'B} + \frac{1}{2}\vec{A'C} - \frac{1}{2}\vec{A'M} = \vec{0}$

Donc $\vec{A'B} + \vec{A'C} - \vec{A'M} = \vec{0}$

Donc A' est le barycentre des points $(B,1)$ $(C,1)$ et $M(-1)$

b) $\vec{A'B} + \vec{A'C} - \vec{A'M} = \vec{0}$

Donc $\vec{A'I} + \vec{IB} + \vec{A'I} + \vec{IC} - \vec{A'I} - \vec{IM} = \vec{0}$

Donc $\vec{A'I} + \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{IM} = \vec{0}$

Donc $-\vec{IA'} + \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{IM} = \vec{0}$

Donc $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{IM} = \vec{0}$

I est donc le barycentre des points $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(M,-1)$

c) De la même façon que a) on prouve que B' est le barycentre des points $(A,1)$ $(C,1)$ et $(M,-1)$

et si on appelle L le milieu de $[BB']$, on verra que

$\vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LC} - \vec{LM} = \vec{0}$

L est donc le barycentre des points $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(M,-1)$

Donc $L = I$

et on fait pareil pour le milieu de CC'.

3) On a $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}=\vec{0}$ ②

$$\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{GM}=\vec{0}$$

G barycentre des points (A, B, C) donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Donc $\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IG}+\cancel{\overrightarrow{IG}}\ \cancel{-\overrightarrow{IG}}-\overrightarrow{GM}=\vec{0}$

$$2\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{IM}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{IM}=\vec{0}$$

Donc I est le barycentre des points $(G,3)$ et $(M,-1)$

$\overrightarrow{IM}=3\overrightarrow{IG}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont proportionnels, donc les points I, M et G sont alignés.

$$3\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{IM}=\vec{0}$$

~~$3\overrightarrow{IG}+3\overrightarrow{MG}$~~

$$3\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{GM}=\vec{0}$$

Donc $2\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{GM}$

Donc $\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GI}$

4) Illisible Partir de $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$

5) Illisible

6) Illisible