A] $f(x) = e^x \cos(x)$ défini sur $\mathbb{R}$.

(1)

1) a) on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Donc $-1 \times e^x \leq \cos(x) \times e^x \leq 1 \times e^x$

Donc $-e^x \leq f(x) \leq e^x$ cqfd

b) $-e^{x} \leq f(x) \leq e^x$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x \leq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

Donc $0 \leq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \leq 0$

Donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$

Donc φ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

2) $A \in \varphi$ et $A \in$ (Axe abscisse)

$\Leftrightarrow$ $y_A = e^{x_A} \cos(x_A)$ et $y_A = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ e^{x_A} \cos(x_A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ \cos(x_A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ x_A = \frac{\pi}{2} + (2k+1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) on étudie f sur $[-\frac{\pi}{2}, \pi/2]$

on sait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Donc $\cos(x + \pi/4) = (\cos(x) \cos(\pi/4)) - (\sin x \times \sin \pi/4)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x - \sin x)$

Donc $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \pi/4)$ cqfd

4) a) $f'(x) = \left(e^x \cos(x)\right)' = e^x \cos x - e^x \sin x$

$\Leftrightarrow f'(x) = e^x\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = \sqrt{2}\, e^x \cos(x + \pi/4)$

b) - sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/4]$, $-\frac{\pi}{4} \leq (x + \pi/4) \leq \pi/2$, donc

$\cos(x+\pi/4) \geq 0$, donc $\sqrt{2}\, e^x \cos(x+\pi/4) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$

- sur l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$, $\pi/2 \leq x + \pi/4 \leq \pi$, donc

$\cos(x+\pi/4) \leq 0$, donc $\sqrt{2}\, e^x \cos(x+\pi/4) \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$.

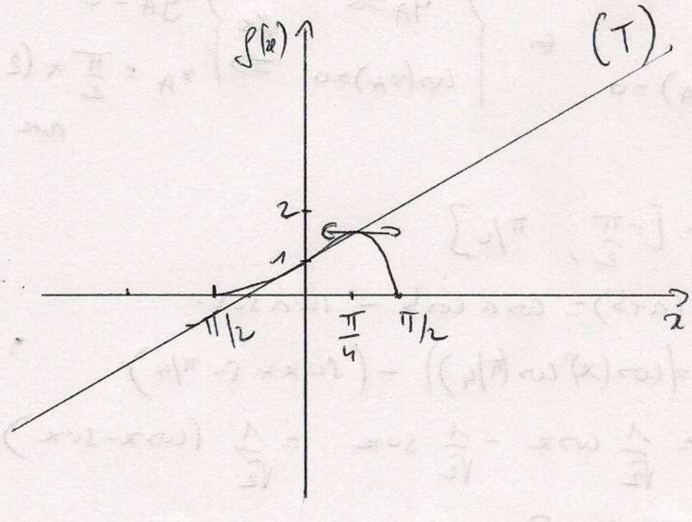
c)

x	$-\pi/2$		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{(\pi/4)}}{\sqrt{2}}$	↘	0

$f(-\pi/2) = 0$ $\quad f(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(\pi/4)} \simeq 1{,}55$ $\quad f(\pi/2) = 0$

$f(0) = 1$

5)



6) On note f'' la fct dérivée de f (B)

a) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

Donc $f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x)$

$= e^x(\cancel{\cos x} - \sin x - \sin x - \cancel{\cos x})$

$= -2\sin x\, e^x$

b) La dérivée seconde s'annule pour $x=0$ (sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$)

Donc la tgte trouve son maximal pour cette valeur.

Et cette valeur vaut $f'(0) = e^0 \times (\cos(0) - \sin(0)) = e^0 = \underline{\underline{1}}$

c) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 1 = 1 \times (x) \Leftrightarrow y = x+1$

Donc la tgte en 0 a pour équation $y = x+1$ (Tracée sur le Graphe de la question 5).

Partie B

(E) $y' - 2y - 1 = 0$

(E') $y' - 2y = 1 - e^x \sin(x)$

1.] Si solution il y a, alors $y = ax+b$.

Remplaçons y par $ax+b$ dans (E)

On obtient $a - 2ax - 2b - 1 = 0$, donc $a=0$ et $b = -1/2$

Si $a=0$, la solution n'est pas du un polynôme du 1er degré

Donc cette <u>affirmation est fausse</u>.

2) Si g est positive et est solution de (E), alors

$g' = 2g + 1 \geq 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc cette affirmation est vraie

3) $y = 3e^{2x} + 1/2$.

Donc $y' - 2y - 1 = 6e^{2x} - 6e^{2x} - 1 - 1 = -2 \neq 0$

Donc cette affirmation est fausse.

4) $y = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

Donc $y' - 2y = \frac{e^x}{2}(-\sin x + \cos x) + \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) - e^x(\cos x + \sin x)$

$y' - 2y = e^x \cos x - e^x \cos x - e^x \sin x$

$y' - 2y = -e^x \sin x \neq 1 - e^x \sin x)$

Donc cette affirmation est fausse