Exercice N°1 ①

A) $g(x) = 1 - e^{2x} - 2x e^{2x}$

1) $\lim\limits_{+\infty} g(x) = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} x e^{2x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} g(x) = ?$

$\lim\limits_{-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{-\infty} x e^{2x} = 0$ (car e^{2x} est plus fort que x)

Donc $\lim\limits_{-\infty} g(x) = 1$.

2) $g'(x) = -2e^{2x} - 2e^{2x} - 4x e^{2x} = -e^{2x}(4 + 4x) = -4e^{2x}(1+x)$

3) Tableau de Variation

si $x \geqslant -1$ $g'(x) \leqslant 0$

si $x \leqslant -1$ $g'(x) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty$

4) $g(0) = \cancel{\ldots}\ 1 - 1 - 0 = 0$

On en déduit que si $x \leq 0$, $g(x) \geq 0$
et si $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$.

B] $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

1) $\lim\limits_{+\infty} f = ?$

$\lim\limits_{+\infty} x - xe^{2x} = \lim\limits_{+\infty} x(1 - e^{2x}) = +\infty \times -\infty = -\infty$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = ?$

$\lim\limits_{-\infty} x - xe^{2x} = -\infty - 0 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

2) $f'(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

3) D'après A], $f'(x) = g(x)$

Donc si $x \leq 0$, $f'(x) \geq 0$
si $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

4) $I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix} \in (\Gamma) \cap (\text{Axe des } x) \iff I \in (\Gamma)$ et $I \in (\text{Axe des } x)$.

Donc $\begin{cases} y_I = x_I + 3 - x_I e^{2x_I} \\ y_I = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_I + 3 - x_I e^{2x_I} = 0 \\ y_I = 0 \end{cases}$

Sur $[0, +\infty[$, la fonction $f(x)$ est décroissante, donc et elle ~~passe~~ traverse l'axe des x (puisque la fonction varie de 3 à $-\infty$). Donc il n'existe qu'une seule valeur x_I pour laquelle $x_I + 3 - x_I e^{2x_I} = 0$.

$f(1) \simeq -3,38$

$f(0,5) \simeq 2,14$

$f(0,6) \simeq 1,61$

$f(0,7) \simeq 0,86$

$f(0,8) \simeq -0,163$

Donc $0,7 < x_I < 0,8$

Exercice N°2

①

$$P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$$

1) a) $P(1)=1-(1-2\sin\alpha)+(1-2\sin\alpha)-1$

$=1-1+2\sin\alpha+1-2\sin\alpha-1$

$=0$

b) $P(1)=0$, donc $\exists a,b,c\in\mathbb{R}$, tel que

$P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

$P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

$\Leftrightarrow P(z)=az^3+bz^2+cz-az^2-bz-c$

$=az^3+z^2(b-a)+z(c-b)-c$

Donc $\begin{cases}a=1\\ b-a=-(1-2\sin\alpha)\\ c-b=1-2\sin\alpha\\ -c=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b-1=-1+2\sin\alpha\\ c=b+1-2\sin\alpha\\ c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\sin\alpha\\ c=2\sin\alpha+1-2\sin\alpha\\ c=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}a=1\\ b=2\sin\alpha\\ c=1\end{cases}}$

Donc $P(z)=(z-1)(z^2+2\sin\alpha\, z+1)$

c) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+2\sin\alpha\, z+1)=0$

$\Leftrightarrow z=1$ ou $z^2+2\sin\alpha\, z+1=0$

$z^2 + 2\sin\alpha z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4\sin^2\alpha - 4$
$= -4(1-\sin^2\alpha)$
$= -4\cos^2\alpha.$

Donc $z = \dfrac{-2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2} = \underline{-\sin\alpha + i\cos\alpha}$

ou $z = \dfrac{-2\sin\alpha - 2i\cos\alpha}{2} = \underline{-\sin\alpha - i\cos\alpha}$

Donc $P(z) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -\sin\alpha + i\cos\alpha \quad \text{ou} \quad z = -\sin\alpha - i\cos\alpha.}$

2) $z_1 = 1$ $\quad z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ $\quad z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$

$\exists \theta_1,\ z_1 = \|z_1\| e^{i\theta}$ $\quad \|z_1\| = 1$ et $\theta_1 = 0$

$\boxed{z_1 : \text{ Module } 1 \text{ , } 1 \text{ Argument } = 0}$

$\exists \theta_2,\ z_2 = \|z_2\| e^{i\theta_2}$ avec $e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2.$

$\|z_2\| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$

Donc $\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Donc $\boxed{z_2 : \text{ Module } 1,\ 1 \text{ Argument } : (\alpha + \pi/2).}$

$\exists \theta_3,\ z_3 = \|z_3\| e^{i\theta_3}$ avec $e^{i\theta_3} = \cos\theta_3 + i\sin\theta_3$

$\|z_3\| = 1$

Donc $\cos\theta_3 + i\sin\theta_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha = \sin(\pi + \alpha) + i\cos(\pi + \alpha)$

⑥

$$\cos\theta_3 + i\sin\theta_3 = \sin(\pi+\alpha) + i\cos(\pi+\alpha)$$

$$= \cos\left(\pi/2 - (\pi+\alpha)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi+\alpha)\right)$$

$$= \cos\left(-\pi/2 - \alpha\right) + i\sin\left(-\pi/2 - \alpha\right)$$

Donc $\boxed{z_3 : \text{Module } 1 \text{ , } 1 \text{ Argument} : -\frac{\pi}{2} - \alpha}$

//