

Partie A)  $f(x) = \ln(1+x)$   $g(x) = \frac{2x}{x+2}$

sur  $[0, +\infty[$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$

1) Etudier le sens de variation de  $h$  sur  $[0, +\infty[$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2}$$

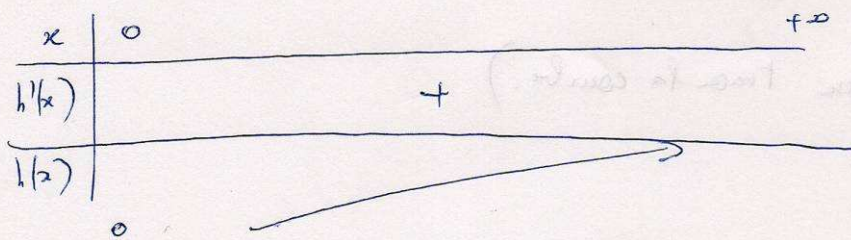
$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)} + \frac{4}{(x+2)^2}$$

sur  $[0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{x+1} > 0$  et  $\frac{4}{(x+2)^2} > 0$

Donc sur  $[0, +\infty[$ ,  $h'(x) > 0$

La fonction  $h$  est donc croissante sur  $[0, +\infty[$ .

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$$



2)  $h$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ , donc  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $h(x) \geq h(0)$

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x) \quad \text{c.q.f.d.}$$

3) Tangente en 0.

Equation de la tangente en 0 de  $\varphi$   $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

~~$y = x$~~   
 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$   $f'(0) = 1$

Donc Tangente en 0 de  $\varphi$ :  $(D_1) y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$ .

Equation de la tangente en 0 de  $\Gamma$   $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$

$g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$   $g'(0) = 1$

Donc Tangente en 0 de  $\Gamma$   $(D_2) y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

On remarque que  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont les mêmes et ont pour équation  $y = x$ .

(Je vous laisse tracer la courbe.)

Partie B

$$f_k(x) = \ln(1+x) - kx \quad \text{sur } ]0, +\infty[.$$

$$1) f_1(x) = \ln(1+x) - x$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

$$\text{sur } ]0, +\infty[, f_1'(x) < 0$$

la f. de  $f_1(x)$  est donc décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

$$2) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty \times (0 - 1) = +\infty \times (-1) = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$b) f_1(0) = 0$$

3)  $f_1(x)$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\forall x \in ]0, +\infty[, f_1(x) \leq f_1(0)$   
Or  $f_1(x) \leq 0$ , donc  $\ln(1+x) - x \leq 0$ , donc  $\underline{\underline{\ln(1+x) \leq x}}$

4) Si  $x \geq 0$  et  $k \geq 1$ , alors  $kx \geq x$   
or on sait que  $\ln(1+x) \leq x$ , donc  $\ln(1+x) \leq x \leq kx$ .  
Donc  $\underline{\underline{\ln(1+x) \leq kx}}$

$$5) f_k(x) = \ln(1+x) - kx, \text{ donc } f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - k$$

$$f_k'(x) = \frac{1-k-kx}{1+x}$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-k-kx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-k}{k}$$

Pour la suite, il faut réapprovisionner votre copie. cdll