Partie A | $f(x) = \ln(1+x)$ $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

sur $[0, +\infty[$, $h(x) = f(x) - g(x)$

1) Etudier le sens de variation de h sur $[0, +\infty[$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)} + \frac{4}{(x+2)^2}$$

sur $[0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x+1} > 0$ et $\dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$

Donc sur $[0, +\infty[$, $h'(x) > 0$

La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$$

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	

2) h est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) \geq h(0)$

$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$. cqfd

3) Tgte en 0.

Equation de la tgte en 0 de φ $\quad y - f(0) = f'(0)(x-0)$

~~y~~

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1.$

Donc Tgte en 0 de φ : (D_1) $y - 0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x.$

Equation de la tgte en 0 de Γ $\qquad y - g(0) = g'(0)(x-0)$

$g'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$ $\qquad g'(0) = 1$

Donc Tgte en 0 de Γ (D_2) $y - 0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x$

On remarque que (D_1) et (D_2) sont les mêmes et ont pour équation $\underline{\underline{y = x}}$

(Je vous laisse tracer la courbe.)

Partie B

$f_k(x) = \ln(1+x) - kx$ sur $[0, +\infty[$.

1) $f_1(x) = \ln(1+x) - x$

$f'_1(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

Sur $]0, +\infty[$, $f'_1(x) < 0$

La fonction $f_1(x)$ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{+\infty} \ln(1+x) - x = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = +\infty \times (0-1) = +\infty \times (-1) = -\infty$

b) $f_1(0) = 0$

3) $f_1(x)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) \leq f(0)$

Donc $f_1(x) \leq 0$, donc $\ln(1+x) - x \leq 0$, donc $\ln(1+x) \leq x$

4) Si $x \geq 0$ et $k \geq 1$, alors $kx \geq x$

or on sait que $\ln(1+x) \leq x$, donc $\ln(1+x) \leq x \leq kx$.

Donc $\ln(1+x) \leq kx$

5) $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$, donc $f'_k(x) = \frac{1}{1+x} - k$

$f'_k(x) = \frac{1-k-kx}{1+x}$.

$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1-k-kx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-k}{k}$

Pour la suite, merci de réapprovisionner votre compte. cdlt