$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

1) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x-1+x^2+x-x^2}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

On en déduit que $\forall x \in]0, +\infty[, \ f'(x) < 0$

La fonction f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ ce qui implique que $\forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) \geqslant 0$.

2) $$I = \int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx = \underbrace{\int_1^\alpha \ln(x)\, dx}_{A} - \underbrace{\int_1^\alpha \ln(x+1)\, dx}_{B}$$

$$A = \int_1^\alpha \ln(x)\, dx = [x\ln(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x} \times x\, dx = [x\ln(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx = [x\ln(x)]_1^\alpha - [x]_1^\alpha$$

$$A = \alpha\ln(\alpha) - \alpha + 1$$

De la même façon

$$B = \int_1^\alpha \ln(x+1)\, dx = [x\ln(x+1)]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{x}{x+1}\, dx$$

$$B = [x\ln(x+1)]_1^\alpha - \int_1^\alpha \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)}\right) dx$$

$$B = [x\ln(x+1)]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx + \int_1^\alpha \frac{dx}{x+1}$$

$$B = [x\ln(1+x)]_1^\alpha - [x]_1^\alpha + [\ln(x+1)]_1^\alpha$$

$$B = \alpha\ln(1+\alpha) - \ln 2 - \alpha + 1 + \ln(\alpha+1) - \ln(2)$$

$$= (\alpha+1)\ln(1+\alpha) - \alpha + 1 - 2\ln(2)$$

Donc $$I = \alpha\ln(\alpha) \cancel{-\alpha} \cancel{+1} - (\alpha+1)\ln(1+\alpha) \cancel{+\alpha} \cancel{-1} + 2\ln(2)$$

$$I = 2\ln(2) - (\alpha+1)\ln(1+\alpha) + \alpha\ln(\alpha)$$

$$I = 2\ln(2) - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + \alpha\ln(\alpha)$$ (c)

$$\int_1^\alpha f(x)\,dx = \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)dx = \int_1^\alpha \frac{1}{x}\,dx + I$$

$$= \left[\ln(x)\right]_1^\alpha + I$$

$$= \ln\alpha + 2\ln(2) - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + \alpha\ln(\alpha)$$

$$= 2\ln(2) + (\alpha+1)\left(\ln(\alpha) - \ln(\alpha+1)\right)$$

$$= 2\ln(2) + (\alpha+1)\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$$

3) a) Dans le 1), on a vu que $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} \geq 0$ (a)

Etudions la fonction $g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$g'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} \geq 0$, donc la fonction g est croissante.

De plus, $\lim_{0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g(x) = 0$

Donc on en déduit que $g(x) \leq 0$, donc $\frac{1}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} \leq 0$ (b)

(a) $\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x}$

(b) $\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x} \geq \frac{1}{x+1}$

$J = \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{k+1}{k}$, donc d'après (a) $J \leq \frac{1}{k}$

et d'après (b) $J \geq \frac{1}{k+1}$

cqfd.

b) $\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} + \ln\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k+1}$ (3)

$$= \ln\frac{k+1}{k}$$

$$= \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \quad \text{cqfd}$$

on sait que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq -f(k) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(k) \leq \frac{k+1-k}{(k+1)k} \Leftrightarrow 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$ cqfd

4) a) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)} = Z(x)$

Donc pour que $Z(x)$ soit égal à $\frac{1}{x(x+1)}$, il faut que $a+b=0$ et $a=1$

Donc $a=1$ et $b=-1$

Donc $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{(x)} - \frac{1}{(x+1)}$

b) $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

(4)

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

On en déduit que $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$, la suite S_n est donc convergente et tend vers 0

c) $0 \le f(k) \le \dfrac{1}{k(k+1)}$

Donc $0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+1)}$.

Donc $0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le S_n$

Donc $0 \le \lim\limits_{+\infty} f(n) + \cdots + f(2n) \le \lim\limits_{+\infty} S_n = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f(n) + \cdots + f(2n) = 0$

5) $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

a) $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = \dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} + \ln\dfrac{n+1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} + \ln\dfrac{2n}{2n+1}$

$= \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} + \ln(n) - \ln(2n+1)$

$= u_n + \ln\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$

$= u_n - \ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right) = u_n - \ln\left(\dfrac{2(n+1/2)}{n}\right)$

$$f(n)+\cdots+f(2n) = u_n - \ln\left(2 \times \frac{(n+1)2}{n}\right)$$

$$= u_n - \ln\left(2 \times \left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$= u_n - \ln(2) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \quad \text{cqfd.}$$

b) $\lim\limits_{+\infty} f(n)+\cdots+f(2n) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n - \ln(2) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n = \ln(2) + \lim\limits_{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \ln(2)$

La suite u_n est donc convergente et tend vers $\ln(2)$