Polynôme du second degré (dans $\mathbb{R}$)

Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Si $\Delta < 0$

Il n'y a pas de valeurs pour lesquelles, $P(x) = 0$ et le signe de $P(x)$ est toujours le même que celui de a.

Exemple : $P(x) = x^2 - 4x + 19$

$$\Delta = (-4)^2 - (4 \times 19 \times 1) = 16 - 76 = -60 < 0$$

Donc $P(x) > 0$ (car $a = 1 > 0$)

b) si $\Delta = 0$

$P(x)$ admet un seul zéro α.

$P(x)$ peut donc s'écrire $P(x) = a(x - \alpha)^2$

Donc $P(x)$ est toujours du signe de a

Donc si $a > 0$, $P(x) \geq 0$

si $a < 0$, $P(x) \leq 0$

c) si $\Delta > 0$

$P(x)$ admet 2 zéros α_1 et α_2 (avec $\alpha_1 < \alpha_2$)

On peut donc écrire $P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$

- Si $a > 0$

  si $x \in]-\infty; \alpha_1] \cup [\alpha_2; +\infty[$, $P(x) \geq 0$

  si $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$, $P(x) \leq 0$

- Si $a < 0$

  si $x \in]-\infty; \alpha_1] \cup [\alpha_2; +\infty[$, $P(x) \leq 0$

  si $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$, $P(x) \geq 0$.