Exercice 1

1

$A = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{N})$

1) $0 = 0^2 + 0^2$ Donc $0 \in E$

$1 = 0^2 + 1^2$ Donc $1 \in E$

$2 = 1^2 + 1^2$ Donc $2 \in E$

$4 = 0^2 + 2^2$ Donc $4 \in E$

$5 = 1^2 + 2^2$ Donc $5 \in E$

$3 = 0 + 3$ ou $3 = 1 + 2$ $\Rightarrow$ Il n'existe pas de Naturel x tel que $x^2 = 2$

$\Downarrow$

Il n'existe pas de Naturel tel que $x^2 = 3$

Donc $3 \notin E$

2) Si $x = 2$ et $y = 2$, on a $U = 4 + 4 = 8$

Si $x = 2$ et $y = 3$, on a $V = 4 + 9 = 13$

$P = U \times V = 8 \times 13 = 104$.

$P = 2^2 + 10^2$ Donc $P \in E$

3) $z = x + iy \qquad m(z) = x^2 + y^2$

a) x et y sont des entiers, donc $m(z)$ est égale un entier

Donc $m(z) \in E$

$z = x + iy$, donc $iz = ix - y$, donc $m(iz) = (-y)^2 + x^2$

$= x^2 + y^2$

$= m(z) \in E$

b) $m(z) \times m(iz) = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

$iz^2 = i(x+iy)(x+iy) = i(x^2 - y^2 + 2ixy) = -2xy + i(x^2 - y^2)$

Donc $\underline{m(iz^2)} = (x^2 - y^2)^2 + (-2xy)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2$

$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = \underline{m(z) \times m(iz)}$

c) $m(z)$ représente le module de z (2)

4) le produit des modules de 2 complexes z_1 et z_2 est égale au module du produit des 2 complexes.

$$\|z_1\| \times \|z_2\| = \|z_1 z_2\|.$$

5) $A \in E$ donc il existe x et $y \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^2+y^2=A$$

$B \in E$ donc il existe x' et $y' \in \mathbb{N}$ tel que

$$x'^2+y'^2=B$$

Donc $AB = \|(x+iy)(x'+iy')\|^2 = \|xx' + (xy')i + (x'y)i - yy'\|$

$$= (xx'+yy')^2 + (xy'+x'y)^2$$

~~$= (xx')^2 + (yy')^2 + 2xx'yy'$~~

~~$(xy')^2 + (x'y)^2 + 2xy'x'y$~~

~~Alors~~ $xx'+yy' \in \mathbb{N}$

et $xy'+x'y \in \mathbb{N}$ Donc $AB \in (E)$.

6) $13 = 4+9 = 2^2+3^2$ Donc $13 \in (E)$

$41 = 16+25 = 4^2+5^2$ Donc $41 \in (E)$

$13 \in (E)$ et $41 \in (E)$, donc $13 \times 41 = 533 \in (E)$

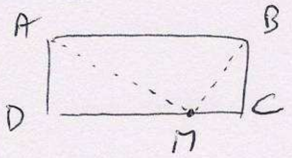
$$533 = 22^2+7^2$$

7) $P = 2^2+10^2$

8) $41^2 = (40)^2+(9)^2$

$41^3 = (236)^2+(115)^2$

Exercice 2



$AB = 12$
$BC = 4$

On pose $DM = x$

On a donc $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{16 + x^2}$

$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{16 + (12-x)^2}$

$\exists x$?, tel que $AB^2 = AM^2 + BM^2$ (1)

ou $AM^2 = AB^2 + BM^2$ (2)

ou $BM^2 = AM^2 + AB^2$ (3)

(1) $AB^2 = AM^2 + BM^2 \Leftrightarrow 12^2 = 16 + x^2 + 16 + (12-x)^2$

$\Leftrightarrow 144 = 16 + x^2 + 16 + 144 - 24x + x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$

Donc $x = \dfrac{12 + \sqrt{80}}{2}$ ou $x = \dfrac{12 - \sqrt{80}}{2}$

$\simeq 10{,}47$ $\simeq 1{,}53$

(2) $AM^2 = AB^2 + BM^2 \Leftrightarrow 16 + x^2 = 144 + 16 + (12-x)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{16} + \cancel{x^2} = 144 + \cancel{16} + 144 + \cancel{x^2} - 24x$

$\Leftrightarrow 24x = 288 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 12}}$

(3) $BM^2 = AM^2 + AB^2 \Leftrightarrow 16 + (12-x)^2 = 16 + x^2 + 144$

$\Leftrightarrow \cancel{16} + \cancel{144} + \cancel{x^2} - 24x = \cancel{16} + \cancel{x^2} + \cancel{144}$

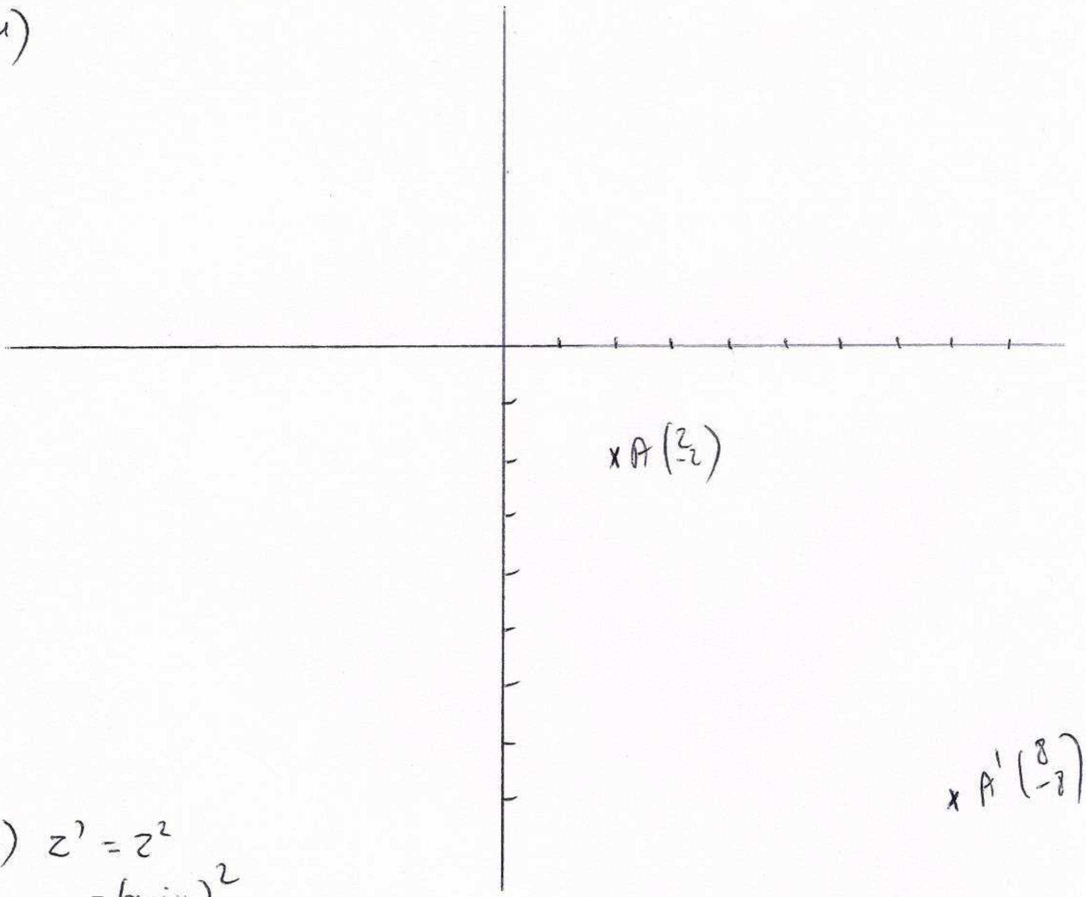
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

Il y a donc 4 solutions : 0, 12, $\dfrac{12+\sqrt{80}}{2}$ et $\dfrac{12-\sqrt{80}}{2}$

Exercice 3

Π : $z = x + iy$ $\qquad z' = z^2$

1)



2) $z' = z^2$

$= (x+iy)^2$

$= (x^2-y^2) + 2ixy$

3) $x' = 0 \iff x^2 - y^2 = 0 \iff y = x$ ou $y = -x$

(E) = Droite $(y=x)$ $\cup$ Droite $(y=-x)$

4) $Im(z^2) = 2 \iff 2xy = 2 \iff xy = 1$

(F) Hyperbole d'équation $y = 1/x$

5) $(G) = (E) \cap (F)$

$y = 1/x$ et $y^2 = x^2 \iff \begin{cases} y^2 = x^2 \\ y^2 = 1/x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 = 1 \\ y^2 = 1/x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = \end{cases}$

Donc $G = \{ A_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; A_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} ; A_3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} ; A_4\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$