Exercice 2

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{+\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$= \lim_{+\infty} 1 + \frac{x\sqrt{1+1/x+1/x^2}}{x}$$

$$= \lim_{+\infty} 1 + \sqrt{1+1/x+1/x^2}$$

$$= 1+1 = 2$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Calculons $\lim\limits_{+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{+\infty} x + \sqrt{x^2+x+1} - 2x$

$$= \lim_{+\infty} -x + \sqrt{x^2+x+1}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x}{x+x} = 1/2$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) - 2x = 1/2$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (2x + 1/2)$

Donc la droite Δ d'équation $y = 2x + 1/2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.