Exercice 1 (suite)

3) z est un complexe quelconque.

a) on pose $z = x + iy$, donc $z_1 = x + i(y-2)$, donc $z' = x + i(2-y)$.

$z' - z = x + i(2-y) - x - iy = i(2-y-y) = 2i(1-y)$

La partie réelle de $z'-z$ est nulle, donc c'est un imaginaire pur.

b) La droite (MM') de ~~coefficient directeur~~ direction $\vec{MM'}$ d'affixe $z'-z$ est donc fixe et parallèle à l'axe des imaginaires.

c) $M = M' \Rightarrow \vec{MM'} = \vec{0} \Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow 2i(1-y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$.

Donc les points vérifiant $M = M'$ sont sur une droite (D) d'équation $y = 1$.

d) I milieu de $[MM']$ a pour affixe $\alpha = \frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}(x + iy + x + i(2-y))$

$\alpha = \frac{1}{2}(2x + 2i) = x + i = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc le point I se trouve toujours sur (D).

e) On en déduit que f est une symétrie par rapport à la droite (D) d'équation $y = 1$

f) Démontrer que ABB' et $A'BB'$ ont la même aire.

A' est le symétrique de A par rapport à la droite (D)
B est le symétrique de B' par rapport à la droite (D)
B' est le symétrique de B par rapport à la droite (D)

Donc le triangle $A'BB'$ est le symétrique de $AB'B$ par rapport à la droite (D).

Les propriétés de la symétrie indiquent qu'il y a conservation des mesures des côtés et des angles.

Les 2 triangles ont donc la même aire.

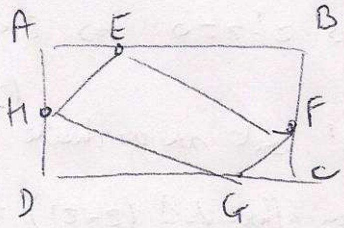
Exercice 2

1) Les distances EF et GH sont identiques et les angles $\widehat{BEF}$ et $\widehat{DGH}$ également, donc $(EF) \parallel (GH)$.

On applique le même raisonnement pour (FG) et (EH).

On en déduit donc que EFGH est un ~~parallèle de~~ parallélogramme.

2) $\mathcal{A}$ = Aire (EFGH) = Aire (ABCD) − Aire (EBF) − Aire (FCG) − Aire (GDH) − Aire (HAE)



Aire (ABCD) = $8 \times 6 = 48$ cm^2

Aire (EBF) = $(EB \times BF)/2 = (8-x) \times x/2 = \dfrac{x(8-x)}{2}$

Aire (FCG) = $(FC \times CG)/2 = (6-x) \times x/2 = \dfrac{x(6-x)}{2}$

Aire (GDH) = $(GD \times DH)/2 = (8-x) \times x/2 = \dfrac{x(8-x)}{2}$

Aire (HAE) = $(AH \times AE)/2 = (6-x) \times x/2 = \dfrac{x(6-x)}{2}$

Donc
$$\mathcal{A} = 48 - \frac{x(8-x)}{2} - \frac{x(6-x)}{2} - \frac{x(8-x)}{2} - \frac{x(6-x)}{2}$$
$$= 48 - x(8-x) - x(6-x) = 48 - x[8-x+6-x]$$
$$= 48 - x(14-2x)$$
$$= 2x^2 - 14x + 48$$

On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.

La fonction atteint son minimum quand sa dérivée s'annule.

$f'(x) = 4x - 14 \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 14/4 = 7/2 = 3,5$

Donc l'Aire Minimum EFGH est $2 \times (3,5)^2 - 14(3,5) + 48 = 23,5$ cm^2

Exercice 3

$f(x) = (1+\sin x)^3$

1) $f(x+2\pi) = (1+\sin(x+2\pi))^3 = (1+\sin x)^3 = f(x)$

Donc f est de période 2π.

2) Etude des variations sur $[-\pi, \pi]$

$f'(x) = 3 \times (1+\sin x)^2 \times \cos x = 3\cos x \times (1+\sin x)^2$

$3\times(1+\sin x)^2$ est toujours positif, le signe de f' est donc indiqué par le signe de $\cos x$.

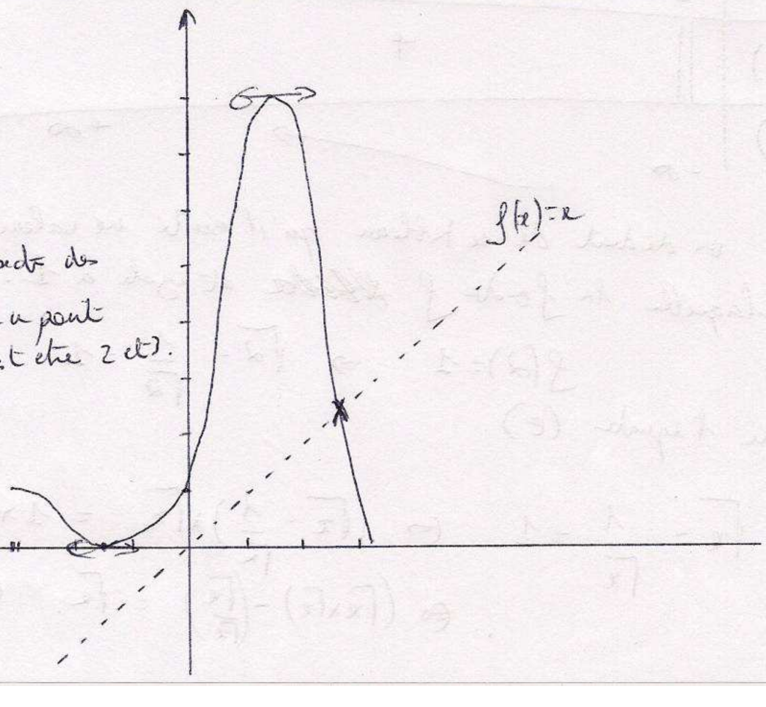
si $x \in [-\pi ; -\pi/2] \cup [\pi/2 ; \pi]$, $\cos(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

si $x \in [-\pi/2 ; \pi/2]$, $\cos(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

on a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		$+\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	8	↘	1

3)



4) on voit que l'intersection des 2 courbes se fait en un point unique dont l'abscisse est entre 2 et 3.

5) Je calcule des valeurs de la fonction $f(x) = (1+\sin x)^3 - x$ pour des valeurs de x comprises entre 2 et 3. (4)

$f(2) = 4,96$ $f(3) = -1,51$ $f(2,9) = -0,997$ $f(2,8) = -0,421$

$f(2,7) = 0,208$ $f(2,75) = -0,112$ $f(2,74) = -0,049$ $f(2,73) = 0,014$.

On en déduit que $\underline{2,73 < \alpha < 2,74}$

Exercice 4 (E) $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$

a) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$\forall x \in D_f,\ f'(x) > 0$, la fonction f est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$

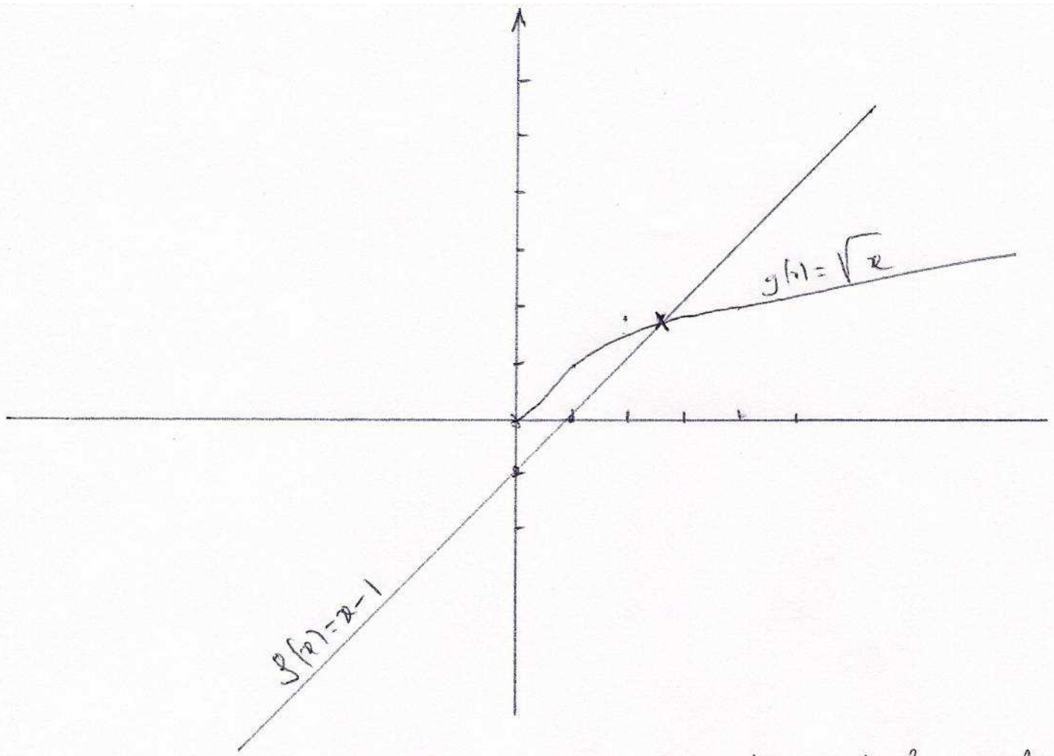
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

On déduit de ce tableau qu'il existe une valeur α pour laquelle la fonction f ~~[illegible]~~ est égale à 1.

$f(\alpha) = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha} - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1$ donc α est solution de l'équation (E).

b) $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \times \sqrt{x} = 1 \times \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) - \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \underline{x - 1 = \sqrt{x}}$ cqfd



On voit graphiquement qu'il existe un point d'intersection entre les 2 courbes dont l'abscisse est compris entre 2 et 3.

c) On pose $x = y^2$

$x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 - 1 = \sqrt{y^2} = y$ (car on sait que $x > 0$)

$\Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5.$

Donc $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\cancel{y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ (car $y > 0$)

Donc $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \simeq 2,618$