1) Intervalle des valeurs possibles de x

x ne peut pas être supérieur à 10, car ABC ne pourrait plus être un triangle.

Donc $0 \leq x \leq 10$

2) ABC est un triangle isocèle et I est le milieu de BC, donc (AI) est la médiatrice du segment [BC]. Donc par définition $(AI) \perp (BC)$ soit l'angle $\widehat{BIA}$ est un angle droit.

Donc ABI est un triangle rectangle en I.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$$AB^2 = BI^2 + AI^2 \iff 100 = x^2 + AI^2$$

$$\iff AI^2 = 100 - x^2 \Rightarrow AI = \sqrt{100 - x^2}$$

Aire(ABC) $= 2 \times IB \times IA = x\sqrt{100-x^2}$

3)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
$f(x)$	0	4,99	9,95	14,83	19,59	24,20	28,61	32,78	36,66	40,18	43,30	45,93	48	49,39	49,98	49,6	48

x	8,5	9	9,5	10
$f(x)$	44,75	39,23	29,66	0

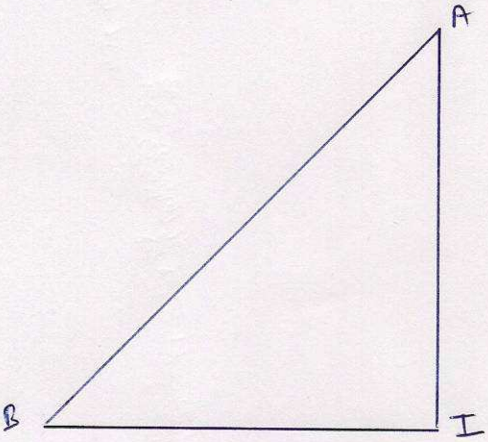
Je ne peux pas tracer puisque je n'ai pas l'annexe.

4)

x	0		7		10
$f(x)$	0	croissant ↗	49,98	décroissant ↘	0

5) a) l'aire maximale de ce triangle semble être 49,98 cm² pour $x = 7$.

b) Si $x = 7$ $\quad AI = \sqrt{100 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51} \simeq 7,14$ cm.



Le triangle ABI semble être isocèle en I.

Par le calcul ~~AB~~ IA = IB sont proches mais pas égaux.

c) Pour que ABI soit isocèle en I, il faut que IB = AI

Donc $x = \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow x^2 = 100 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 100$

$\Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50} \simeq \underline{7,07 \text{ cm}}$

d) Aire ABC $= f(\sqrt{50}) = \sqrt{50} \times \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} + \sqrt{50} = \underline{50 \text{ cm}^2}$

e) L'aire du triangle est représentée par $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

(*) La fonction carré est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui signifie que le carré d'une expression positive a le même sens de variation que l'expression elle-même.

On pose $g(x) = f(x)^2$

$g(x) = \left(x\sqrt{100-x^2}\right)^2 = x^2 + (100-x^2) = -x^4+100x^2$

On pose $Y = x^2$

Donc $g(x) = -Y^2+100Y$

L'expression $-Y^2+100Y$ est un polynôme de second degré.

Il est admis, dans le cours de seconde, que le maximal d'un polynôme ax^2+bx+c (avec $a<0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$.

Donc la fonction $g(x)$ atteint son maximal en $\frac{-100}{-2} = 50 = Y$.

Si $Y=50$, alors $x=\sqrt{50}$ (car $Y=x^2$).

Donc la fonction $g(x)=f(x)^2$ atteint son maximal pour $x=\sqrt{50}$

Donc suite au (*), la fonction $f(x)$ atteint son maximal pour $x=\sqrt{50}$

Donc l'Aire maximale du triangle ABC est bien $\sqrt{50}$