Exercice 2.

①

Sur l'axe de x, une graduation représente 0,5.

Sur l'axe de y, une graduation représente 1.

1) $f(0,5)=1$ et $f(1,5)=2,5=5/2$.

le point M d'abscisse -1 appartient à la droite (D) qui passe par les points $A(0,1)$ et $B(-1,2)$

(D) : $y=ax+b$ $\quad A\in(D) \Leftrightarrow 1=0+b$ $\quad \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$

$B\in(D) \Leftrightarrow 2=-a+b$

Donc (D) : $y=-x+1$.

$M\in(D) \Leftrightarrow f(-1)=2$ (on pouvait aussi la trouver directement sur le graphique).

2) La fonction f a 4 définitions distinctes sur 4 intervalles.

a) sur $[-2,-1[$, $f(x)=ax+b$ avec $f(-2)=5$ et $f(-1)=3$

$\begin{cases} 5=-2a+b \\ 3=-a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+2a=3+a \\ b=5+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

Donc sur $[-2,-1[$, $f(x)=-2x+1$

b) sur $[-1,0[$, $f(x)=ax+b$ avec $f(0)=1$ et $f(-1,2)$

Donc sur $[-1;0[$, $f(x)=-x+1$

c) sur $[0,1[$, $f(x)=1$

d) sur $[1;2]$, $f(x)=ax+b$ avec $f(1)=2$ et $f(2)=3$

Donc $\begin{cases} 2=a+b \\ 3=2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-a=3-2a \\ b=2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Donc sur $[1;2]$, $f(x)=x+1$.

3) $\lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{-1^-} -2x+1 = 3$ et $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{1} -x+1 = 2$

f n'est donc pas continue en -1.

$\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0} -x+1 = 1$ et $\lim\limits_{0^+} f = 1$, donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{1} 1 = 1$ et $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{1} x+1 = 2$ ②

Donc f n'est pas continue en 1.

La fonction f est donc continue sur $[-2,-1[\cup]-1;1[\cup]1;2]$.

4) $f(-1,5) = -2\times(-1,5)+1 = 3+1 = 4$ donc $A \in C_f$.

$f(4/3) = 4/3+1 = 7/3 \neq 2,25$ donc $B \notin C_f$.

$f(-1/\sqrt{2}) = -(-1/\sqrt{2})+1 = 1/\sqrt{2}+1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \neq \sqrt{2}$, donc $C \notin C_f$.

5) $\lim\limits_{\text{droite de }-1} f = \lim\limits_{-1} -x+1 = 2$

$\lim\limits_{\text{gauche de }-1} f = \lim\limits_{-1} -2x+1 = 3$

6) En $3/2$, la fonction f est continue et décrit une droite d'équation $f(x) = x+1$, donc la fonction f semble dérivable en $3/2$.

$$\lim_{x\to 3/2} \frac{f(x)-f(3/2)}{x-3/2} = \lim_{3/2} \frac{x+1-3/2}{x+1-3/2} = \lim_{3/2} \frac{x-1/2}{x-1/2} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

7) $f(x)=2 \iff \begin{cases} (x\in[-2,-1] \text{ et } -2x+1=2) \\ \text{ou} \\ (x\in[-1,0] \text{ et } -x+1=2) \\ \text{ou} \\ (x\in[0,1] \text{ et } 1=2) \\ \text{ou} \\ (x\in[1,2] \text{ et } x+1=2) \end{cases} \iff \begin{cases} x\in[-2;-1] \text{ et } x=-1/2 \\ \text{ou} \\ x\in[-1;0] \text{ et } x=-1 \\ \text{ou} \\ (\text{IMPOSSIBLE}) \\ \text{ou} \\ x\in[1,2] \text{ et } x=1. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (\text{IMPOSSIBLE}) \\ \text{ou} \\ x=-1 \\ \text{ou} \\ (\text{IMPOSSIBLE}) \\ \text{ou} \\ x=1 \end{cases} \iff \{\, x=1 \text{ ou } x=-1$

$2f(x) > 5 \iff f(x) > 5/2$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \in [-2;-1[\text{ et } -2x+1 > 5/2 \\ \text{ou} \\ x \in [-1,0[\text{ et } -x+1 > 5/2 \\ \text{ou} \\ x \in [0,1[\text{ et } 1 > 5/2 \\ \text{ou} \\ x \in [1,2] \text{ et } x+1 > 5/2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \in [-2;-1[\text{ et } x < -3/4 \\ \text{ou} \\ x \in [-1,0[\text{ et } x < -3/2 \\ \text{ou} \\ (\text{IMPOSSIBLE}) \\ \text{ou} \\ x \in [1;2] \text{ et } x > 3/2 \end{array}\right.$$

Donc $x \in \left([-2;-1[\,\cap\, [-2;-3/4[\right) \cup \left([-1,0[\,\cap\, [-2;-3/2[\right)$
$\cup \left([1,2] \cap \,]3/2;2]\right)$

Donc $x \in [-2; \cancel{\;}\,1[\,\cup\, \emptyset \,\cup\,]3/2;2]$

$$x \in [-2; \overset{-1}{\cancel{\;}}[\,\cup\,]3/2;2]$$