Exercice 1

1) a) $\vec{AA} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = 1\times\vec{AB} + 0\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AC} = 0\times\vec{AB} + 1\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AA'} = \vec{AC} + \vec{CA'} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$

$\vec{AA'} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

$\vec{AB'} = \vec{AC} + \vec{CB'} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$

$\vec{AC'} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$

b) (AA') passe par le point A et le point A'.

Equation cartésienne : $y = ax + b$

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in (AA') \Leftrightarrow 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$

$A'\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} \in (AA') \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a\times 1/2 \Leftrightarrow a = 1$ Donc $(AA') : y = x$

(BB') passe par le point B et le point B'

$y = ax + b$

$B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in (BB') \Rightarrow 0 = a + b$

$B'\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix} \in (BB') \Rightarrow 1/2 = a\times 0 + b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1/2 \\ a = -1/2 \end{cases}$

Donc $(BB') : y = -\frac{1}{2}x + 1/2$

(CC') passe par le point C et le point C'

$y = ax + b$

$C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in (CC') \Leftrightarrow 1 = b$

$C'\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} \in (CC') \Leftrightarrow 0 = 1/2\, a + b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Donc $(CC') : y = -2x + 1$

2) $G\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix} \in (AA') \cap (BB') \Leftrightarrow \begin{cases} y_G = x_G \\ y_G = -\frac{1}{2}x_G + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_G = x_G \\ \frac{3}{2}x_G = 1/2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_G = 1/3 \\ y_G = 1/3 \end{cases}$ Donc $G\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$

2 b) $(CC') : y = -2x + 1$

$G\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et on a bien $-2\times\left(\frac{1}{3}\right)+1 = -\frac{2}{3}+1 = \frac{1}{3}$

Donc $G \in (CC')$.

On vient de démontrer que l'intersection des trois médianes d'un triangle sont concourantes en un même point qui est appelé "Centre de Gravité du Triangle".

3 a) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

b) $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'} = \frac{2}{3}\left(\vec{BA} + \vec{AB'}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right)$

$= -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

$\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC'} = \frac{2}{3}\left(\vec{CA} + \vec{AC'}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right)$

$= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

$= \vec{AB}\left(-1/3 + 2/3 - 1/3\right) + \vec{AC}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$

$= 0 \times \vec{AB} + 0 \times \vec{AC}$

$= \vec{0}$ cqfd

c) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M = G$ cqfd

Veuillez vous abonner pour la suite