$f(x) = x^2 \sin(1/x)$ (1)

a) La fonct° est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

si $x \neq 0$, $f(x)$ est dérivable car c'est le produit de 2 fonct°s dérivables x^2 et $\sin(1/x)$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) + x^2 \cdot (-1/x^2) \cdot \cos(1/x) = 2x \sin(1/x) - \cos(\tfrac{1}{x})$$

si $x = 0$ $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin(1/h)$$

or $\quad \lim\limits_{h \to 0} -|h| \leq \lim\limits_{h \to 0} h \sin(1/h) \leq \lim\limits_{h \to 0} |h|$

Donc $\quad 0 \leq \lim\limits_{h \to 0} h \sin(1/h) \leq 0$

Donc $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$ La fonct° f est donc dérivable en 0

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

b) La dérivée f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

Il faut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

$$f'(x) = \cancel{2x} \; 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \underbrace{\lim_{0} 2x \sin(1/x)}_{0} - \lim_{0} \cos(1/x)$$

$\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.

Donc $\boxed{f'(x) \text{ n'est pas continue en } 0 \text{, donc ne l'est pas sur } \mathbb{R}}$

Exercice 2

1) f est dérivable en a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \ell \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{h} = -\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = \ell-(-\ell) = 2\ell = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \alpha$$

, donc existe et est finie

CQFD

2) La Réciproque n'est pas vraie.

Prenons par exemple la fonction $f : \begin{cases} \text{si } x \geq 0, & f(x) = 2x+1 \\ \text{si } x < 0, & f(x) = 1-3x. \end{cases}$

$a=0 \qquad \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(-h)}{h} = \dfrac{2h+1-1+3h}{h} = \dfrac{5h}{h} = 5$

D'autre part, la fonction f n'est pas dérivable en 0 (car à droite la dérivée vaut 2 et à gauche, elle vaut -3).

CQFD