Exercice 2 $\quad P(1\,;5) \quad A(-1\,;3) \quad I(-3\,;5) \quad N(2\,;0)$ 

1) $\vec{AI} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{IN} = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$

on voit que $\vec{IN} = -5/2\ \vec{AI}$, donc les vecteurs $\vec{IN}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires, donc les points I, N et A sont alignés, donc $A \in (IN)$.

2) calculons les distances PA, PN et AN :

$PA = \|\vec{PA}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$PN = \|\vec{PN}\| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$AN = \|\vec{AN}\| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$.

on voit que $PN^2 = 26$ et que $PA^2 + AN^2 = 8 + 18 = 26$.

Donc $PN^2 = PA^2 + AN^2$, donc par la réciproque du Théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle APN est rectangle en A.

3) La hauteur issue du point P du triangle PIN est la distance du point P à la droite (IN)

la droite (IN) a pour équation : $\cancel{ax+by+c=0}$ $\quad y = ax+b$

$\cancel{I \in (IN)}$, ~~donc~~ $\cancel{-3a+5b+c=0}$

$\cancel{N \in (IN)}$, ~~donc~~ $\cancel{2a+c=0}$ $\iff \cancel{\begin{cases} c=-2a \\ -3a+5b-2a=0 \\ -a+3b+c=0 \end{cases}}$ $\iff \cancel{\begin{cases} c=2a \\ a=b \end{cases}}$

$\cancel{A \in (IN)}$, ~~donc~~ $\cancel{-a+3b+c=0}$

$I \in (IN) \iff 5 = -3a+b$

$N \in (IN) \iff 0 = 2a+b$ $\iff \begin{cases} b=-2a \\ 5=-3a-2a \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

Donc $(IN) : y = -x+2$

Donc l'équation est $x+y-2=0$

Donc $h = \left| \dfrac{1 \times x_P + 1 \times y_P - 2}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \left| \dfrac{1\times 1 + 1\times 5 - 2}{\sqrt{2}} \right| = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Exercice 1

$A = 1,0000002 \qquad B = \sqrt{1,0000004}$

1) $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$

a) Pour que $f$ soit défini, il faut que $x+1 \geq 0$, donc $x \geq -1$, donc $D_f = [-1, +\infty[$.

$g$ est défini sur $\mathbb{R}$, donc $D_g = \mathbb{R}$.

b) $f(4\times10^{-7}) = \sqrt{1+4\times10^{-7}} = \sqrt{1+0,0000004} = \sqrt{1,0000004} = B$

$g(4\times10^{-7}) = 1 + \frac{4\times10^{-7}}{2} = 1 + 2\times10^{-7} = 1+0,0000002 = 1,0000002 = A$

2) a) La racine carrée d'un nombre positif est toujours positive, donc

$\forall x \in [-1; +\infty[, \quad f(x) \geq 0$

D'autre part, si $x \geq -1$, alors $\frac{x}{2} \geq -\frac{1}{2}$, donc $1+\frac{x}{2} \geq -\frac{1}{2}+1$

Donc $1+\frac{x}{2} \geq 1/2 > 0$, donc $g(x) > 0$

b) $[f(x)]^2 = (\sqrt{1+x})^2 = 1+x$

$[g(x)]^2 = (1+\frac{x}{2})^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + x = 1 + x + \frac{x^2}{4}$.

c) $\forall x \in [-1; +\infty[ - \{0\}, \quad \frac{x^2}{4} > 0$, donc $1+x+\frac{x^2}{4} > 1+x$

donc $g^2(x) > f^2(x)$, cqfd

d) $\forall x \in [-1; +\infty[ - \{0\}, \quad f^2(x) < g^2(x)$, donc $\sqrt{f^2(x)} < \sqrt{g^2(x)}$.

, donc $|f(x)| < |g(x)|$

on a vu que $\forall x \in [-1; +\infty[ - \{0\}, \quad |f(x)| = f(x)$ (car $f \geq 0$)

et $|g(x)| = g(x)$ (car $g > 0$)

Donc $\forall x \in [-1; +\infty[ - \{0\}$ , $f(x) < g(x)$ ③

e) $\forall x \in [-1; +\infty[ - \{0\}$ , $f(x) < g(x)$

Donc $f(4 \times 10^{-7}) < g(4 \times 10^{-7})$

Donc $B < A$ $(\sqrt{1{,}0000004} < 1{,}0000002)$.