1

$f(x) = x+1+g(x)$

$g(x) = (ax+b)\,e^{-x^2}$

1) Déterminer a et b

$f(0) = 1$ (car $A \in \mathcal{C}_f$)

Donc $0+1+g(0) = 1 \iff 1+(a\times 0+b)\times e^{-0} = 1$

$\iff 1+b = 1 \iff b = 0$

En A, la courbe admet une tgte d'équat° $y = (1-e)x+1$.

Donc $f'(0) = 1-e$.

$f'(x) = (x+1+g(x))' = 1+g'(x) = 1 + a\,e^{-x^2} - 2x(ax+b)e^{-x^2}$

Donc $f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2ax^2 e^{-x^2}$ (car $b=0$)

$= 1 + a(1-2x^2)e^{-x^2}$

$f'(0) = 1-e$ Donc $1+a = 1-e \iff a = -e$

Donc $a = -e$ et $b = 0$

Donc $\underline{\underline{f(x) = x+1-ex\,e^{-x^2}}} = \underline{\underline{1+x-x\,e^{(1-x^2)}}}$

2) Etude de f

Equat° de la Tgte en A $\quad y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$f(0) = 1 \qquad f'(x) = 1 - e^{(1-x^2)} + 2x\cdot x\,e^{(1-x^2)}$

$= 1 + e^{(1-x^2)}(2x^2-1)$.

$f'(0) = 1-e$

Donc $T : y - 1 = (1-e)x$.

$\iff \underline{\underline{y = (1-e)x+1}}$ cqfd

②

b) Pour étudier la position de C par rapport à T, il faut étudier le signe de la fonction $h(x) = f(x) - T(x)$

avec $f(x) = 1 + x - x e^{(1-x^2)}$ et $T(x) = (1-e)x + 1$.

$h(x) = 1 + x - x e^{(1-x^2)} + (e-1)x - 1$

$= \cancel{1} + \cancel{x} - x e^{(1-x^2)} + e x - \cancel{x} - \cancel{1}$

$= x \left(e - e^{(1-x^2)} \right).$

$= e x \left(1 - e^{(-x^2)} \right).$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$, donc $e^{(-x^2)} \leq 1$.

Donc $1 - e^{(-x^2)} \geq 0$

Donc $\boxed{\text{si } x \leq 0}$, $h(x) \leq 0 \Rightarrow$ C est au ~~dessus~~ DESSOUS de T

et $\boxed{\text{si } x \geq 0}$, $h(x) \geq 0 \Rightarrow$ C est au DESSUS de T.

c) $f''(x)$?

on sait que $f'(x) = 1 + e^{(1-x^2)}(2x^2 - 1)$

$f''(x) = (f'(x))' = 4x e^{(1-x^2)} - 2x e^{(1-x^2)}(2x^2 - 1)$

$= e^{(1-x^2)} \left[4x - 2x(2x^2 - 1) \right]$

$f''(x) = e^{(1-x^2)} (6x - 4x^3)$

Comme $e^{(1-x^2)} \geq 0$, le signe de $f''(x)$ est donc le même que celui de $6x - 4x^3$ cqfd

d) $f''(x) = e^{(1-x^2)}(6x - 4x^3) = x e^{(1-x^2)}(6 - 4x^2)$.

Etudions le signe de $f''(x)$ (3)

$f''(x) = 0 \Rightarrow x(6-4x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $6-4x^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2 = 6/4 = 3/2$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$6-4x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$2{,}21$	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$2{,}21$	$\searrow$	1

$f'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1 + e^{(1-3/2)}\left(2\times\frac{3}{2}-1\right) = 1 + e^{-1/2}\times(2) = \frac{2}{\sqrt{e}} + 1 \approx 2{,}21$

$f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}} + 1 \approx 2{,}21$

Sur $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}} ; 0\right]$, f' est décroissante et $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0$ et $f'(0) < 0$

Donc il existe une valeur $\alpha \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} ; 0\right]$, telle que $f'(\alpha) = 0$

Sur $\left[0 ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, f' est croissante et $f(0) < 0$ et $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0$

Donc il existe une valeur $\beta \in \left[0 ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, telle que $f'(\beta) = 0$.

$-0{,}52 < \alpha < -0{,}51$ et $\beta = -\alpha$ $(0{,}51 < \beta < 0{,}52)$

Veuillez approvisionner votre compte pour la suite