$f \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ ①

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n dx \right)^{1/n}$

Etudions dans un premier temps $A_n = \int_0^1 f(x)^n dx$

$A_n = \int_0^1 f(x)^n dx$

on fait une intégration par parties.

on pose : $u = f(x)^n$ et $v' = 1$.

Donc $A_n = [f(x)]^n \times x]_0^1 - \int_0^1 n \times f'(x) f^{(n-1)}(x) \times x \, dx$.

$= 1 \times f(1)^n - 0 - \int_0^1 n f'(x) f^{(n-1)}(x) \times x \times dx$.

$\exists c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 n f'(x) \times [f(x)]^{n-1} \times x \, dx = c \times \int_0^1 n f' f^{n-1} dx$

$= c \, [f(x)^n]_0^1$

Donc $\exists c \in [0,1]$ tel que $A_n = f(1)^n - c\,[f(1)^n - f(0)^n]$

on a déduit de cette première égalité que $\underline{A_n \leq f(1)^n}$

D'autre part, on sait que ~~$\int_0^1 f \times g \, dx$~~ $\left| \int_0^1 |f(x) g(x)| dx \right|^2 \leq$

$\left| \int_0^1 f(x) dx \right|^2 + \left| \int_0^1 g(x) dx \right|^2$.

Donc $\int_0^1 f(x)^n dx = \int_0^1 |f(x)|^n dx$ (car $f \in \mathbb{R}^+$)

~~Donc $\int_0^1 |f(x)|^n dx \leq \int_0$~~

$\left| \int_0^1 f(x)^{(n-1)} dx \right|^2 =$ ~~$\int_0^1 f(x)^{n} \times f(x) dx$~~ $\leq \int_0^1 f(x)^n dx + \int_0^1 f(x)^{n-2} dx$

Donc $A_{n-1}^2 \leq A_n + A_{n-2}$

On a déduit que $A_n \geq \frac{I_{n-1}^2}{I_{n-2}} \geq f(1)^{n-1}$.

Donc $f(1)^{n-1} \leq A_n \leq f(1)^n$.

Donc $\left(f(1)^{n-1}\right)^{1/n} \leq A_n^{1/n} \leq \left(f(1)^n\right)^{1/m}$.

Donc $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} (f(1))^{\frac{n-1}{n}}}_{f(1)} \leq \lim_{+\infty} \int_0^1 (f(x))^n dx \leq f(1)$

$f(1) \leq \lim_{+\infty} \int_0^1 (f(x))^n dx \leq f(1)$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^m dx\right)^{1/m} = f(1)$