$M(z) \to M(z')$ avec $z' = -1/z$

I milieu de MM'

1) $z_I = \dfrac{z+z'}{2} = \dfrac{z - 1/z}{2} = \dfrac{z^2-1}{2z}$

2) $z = x+iy$

a) $z_I = \dfrac{(x+iy)^2 - 1}{2(x+iy)} = \dfrac{x^2-y^2+2ixy-1}{2(x+iy)} = \dfrac{(x^2-y^2-1)+2ixy}{2(x+iy)}$

$z_I = \dfrac{[(x^2-y^2-1)+2ixy](x-iy)}{2(x+iy)(x-iy)}$

$z_I = \dfrac{x(x^2-y^2-1) - iy(x^2-y^2-1) + 2ix^2y + 2xy^2}{2(x^2+y^2)}$

$z_I = \dfrac{x^3-xy^2-x+2xy^2 + i(-yx^2+y^3+y+2x^2y)}{2(x^2+y^2)}$

$z_I = \dfrac{(x^3+xy^2-x) + i(y^3+x^2y+y)}{2(x^2+y^2)}$

Donc $Re(z_I) = \dfrac{x^3+xy^2-x}{2(x^2+y^2)}$ et $Im(z_I) = \dfrac{y^3+x^2y+y}{2(x^2+y^2)}$.

b) $I \in$ Axe des Abscisses $\Leftrightarrow$ La partie Imaginaire de z_I est égale à 0 $\Rightarrow Im(z_I) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^3+x^2y+y}{2(x^2+y^2)} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{y(y^2+x^2+1)}{2(x^2+y^2)} = 0$

$x^2+y^2 \neq 0$ et $(y^2+x^2+1 \neq 0)$, donc $y = 0$.

Donc $A = \mathbb{R}$ (Ensemble des réels non complexes)

c) $I \in$ Axe des ordonnées $\Leftrightarrow$ La partie Réelle de z_I est égale à 0

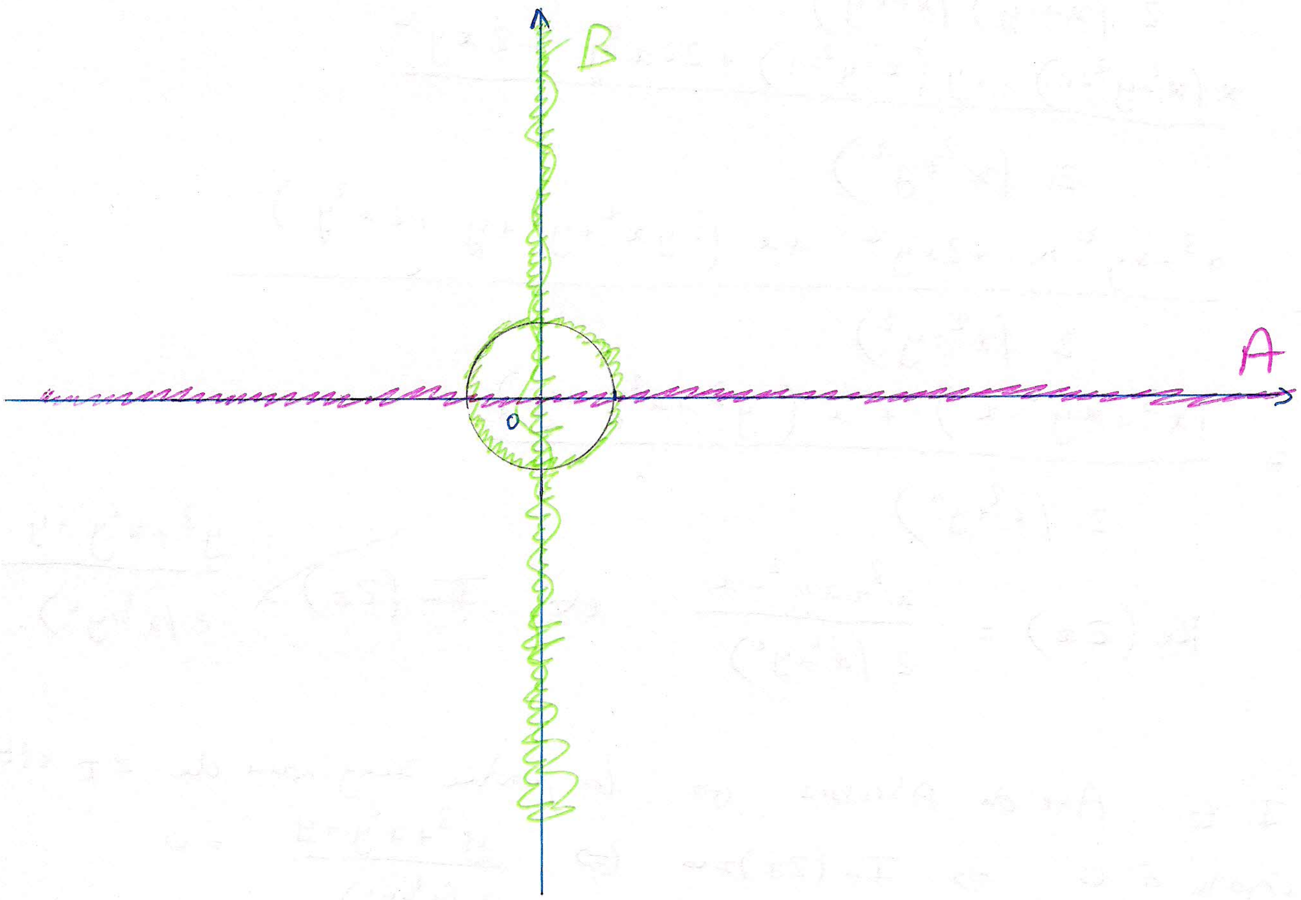
$\Rightarrow Re(z_I) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+xy^2-x}{2(x^2+y^2)} = 0$

$$\frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2+y^2-1 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x^2+y^2 = 1.$$

B est donc la réunion de l'ensemble des complexes sans partie réelle et du Cercle de Centre $O(0,0)$ et de Rayon 1.

d)



3) Solutions algébriques de

a) on pose $Z = \frac{z-3i}{z+2}$

on a donc $Z^2 - 6Z + 13 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = 36 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16$

$\sqrt{\Delta} = 4i$ ou $-4i$

Donc $Z = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$

ou $Z = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$