Question Préliminaire



$1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < 1 \iff e^{-x} < e^{0}$

$\iff -x < 0 \iff \underline{\underline{x > 0}}$

Donc $1 - e^{-x} > 0$, si $x \in ]0 ; +\infty[$.

Partie 1.

$g(x) = e^{-x} + x - 2$ . l'Ensemble de Definition de $g$ est $\mathbb{R}$.

1) $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} e^{-x} + x - 2 = \lim\limits_{+\infty} e^{-x} + \lim\limits_{+\infty} x - 2 = 0 + \infty = \underline{\underline{+\infty}}$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) - x = -2$, donc la Courbe representative de $g$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty} e^{-x} + x - 2 = \lim\limits_{-\infty} e^{-x} = \underline{\underline{+\infty}}$

$\lim\limits_{-\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$ (Donc pas d'asymptote oblique en $-\infty$).

2) $g'(x) = 1 - e^{-x}$

Si $x \geq 0$, $g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$

Si $x \leq 0$, $g'(x) \leq 0 \Rightarrow g$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) Il y a une solution $x_0 \in ]-\infty, 0]$, car la fonction $g$ est décroissante sur cet intervalle et elle change de signe.

Il y a une solution $x_1 \in [0 ; +\infty[$, car la fonction $g$ est croissante sur cet intervalle et elle change de signe.

$x_0 \simeq \underline{\underline{-1,15}}$ et $x_1 \simeq \underline{\underline{1,84}}$

4) si $-1{,}15 \leq x \leq 1{,}84$, $g(x) \leq 0$

si $x \leq -1{,}15$ ou $x \geq 1{,}84$, $g(x) \geq 0$.

Partie 2

$$f(x) = 2e^{-x} - x^2 + 4x$$

$D_f = \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

2) $f'(x) = -2e^{-x} - 2x + 4 = -2\left(e^{-x} + x - 2\right) = -2g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1{,}15$ | | $1{,}84$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0{,}39$ | $\nearrow$ | $4{,}29$ | $\searrow$ | $-\infty$ |