BARYCENTRE

I. Qu'est-ce qu'un barycentre ?

1) Existence et définition

Point pondéré

On appelle *point pondéré* tout couple (A, α) où A est un point du plan (ou de l'espace...) et α est un nombre réel.

Théorème

Soit $\left((A_i,\alpha_i)\right)_{1\le i\le n}$ n points pondérés du plan tels que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$. Alors, il existe un point G et un seul tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}.$$

Démonstration

Elle se fait en utilisant la relation de Chasles. On cherche donc à déterminer le point G, s'il existe, qui vérifie

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}.$$

Cette relation équivaut à

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\left(\alpha_2\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}\right)+...+\left(\alpha_n\overrightarrow{GA_1}+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0}$$

d'où l'on tire $\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{A_1G}=\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}$.

Comme $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$, il est alors clair que G est déterminé de manière unique par :

$$\overrightarrow{A_1G}=\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}\left(\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\right)$$

Remarquons que dans le cas de deux points A et B, affectés de coefficients α et β tels que $\alpha+\beta\neq 0$, on aurait $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, ou si l'on préfère $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

Définition

Ce point est alors appelé *barycentre* des n points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2),..., (A_n, α_n).

2) Isobarycentre

Dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha$ ($\neq 0$), le point G est alors appelé *isobarycentre* des points A_1, A_2, ..., A_n.

- Ainsi, l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
- L'isobarycentre de trois points A, B et C formant un triangle est le centre de gravité du triangle ABC.

En effet, un tel point est défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, soit, si l'on appelle A' le milieu de [BC] :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

Le point G est donc situé sur la médiane [AA'], sur les deux tiers de cette médiane en partant de A : c'est bien le centre de gravité de A.

II. Quelques propriétés du barycentre.

1) Invariance du barycentre

Théorème

On ne change pas le barycentre de n points pondérés en multipliant tous les coefficients par un même réel k non nul.

C'est immédiat en se basant sur la définition.

2) Associativité du barycentre

Théorème

On ne change pas le barycentre de n points pondérés en remplaçant p de ces points, dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté de cette somme.

Soit J la partie de l'intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$ correspondant aux p points pondérés choisis. On suppose que la somme des α_i pour i appartenant à J est non nulle : les points pondérés $\left((A_i,\alpha_i)\right)_{i\in J}$ ont un barycentre G_1.

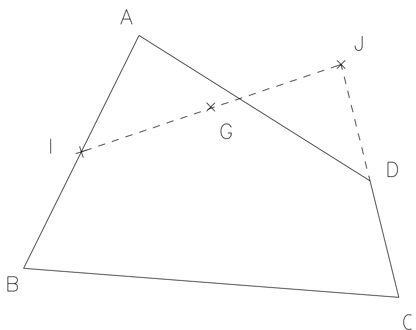
On a alors l'égalité :

$$\vec{0}=\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\sum_{i\in J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}+\sum_{i\in[\![1,n]\!]-J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$$

$$=\left(\sum_{i\in J}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG_1}+\sum_{i\in[\![1,n]\!]-J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$$

ce qui prouve que G est barycentre de $\left(G_1,\sum_{i\in J}\alpha_i\right)$ et des autres points G_i affectés de leur coefficient α_i.

Ainsi pour construire le barycentre G de (A, 1), (B, 1), (C, –2) et (D, 4) (voir la figure ci-contre)
a) on construit l'isobarycentre I des points A et B : I est le milieu de [AB] ;



b) on construit le barycentre J de $(C,-2)$ et $(D,4)$: J vérifie $\overrightarrow{CJ} = \frac{4}{2}\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CD}$

c) G est alors le barycentre de $(I,2)$ et de $(J,2)$: c'est le milieu du segment $[IJ]$.

3) Coordonnées du barycentre

Théorème

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère n points A_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i). Le barycentre des n points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha} \ ; \ y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n}{\alpha} \ ; \ z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n}{\alpha}$$

en posant $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Chacune des coordonnées est donc la moyenne des coordonnées correspondantes des points, moyenne pondérée par les coefficients α_i.

Il suffit de remarquer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ...\alpha_n\overrightarrow{OA_n}\right)$ et d'écrire l'égalité deux à deux des coordonnées.

On a un résultat analogue pour l'affixe du barycentre de n points pondérés.

4) Caractérisation de droites et plans

L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).

Il est clair que le barycentre de deux points distincts est sur la droite (AB).
Réciproquement soit M un point de la droite (AB) et montrons que le point M est barycentre des points A et B avec des coefficients appropriés.

Comme M appartient à la droite (AB), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, égalité vectorielle qui équivaut à :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB}$$

$$(1-k)\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

qui prouve que M est alors barycentre de $(A, 1-k)$ et (B, k). Remarquons que la somme des coefficients est bien nulle.

L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

Le sens direct est immédiat.

Si M est un point du plan (ABC), il existe deux réels k et k', tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$ d'où l'on déduit par un raisonnement analogue au précédent que :

$$(1-k-k')\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM} + k'\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

qui prouve que M est barycentre de $(A, 1-k-k')$, (B, k) et (C, k').