Exercice 1 | A]

(1)

1) on utilise l'intégration par parties $\int uv' = uv - \int u'v$

$\int -\ln(x)\,dx$ on a $u = -\ln x$ et $v' = 1$

$u' = -1/x$ et $v = x$

$$\int -\ln(x)\,dx = [-x\ln x] - \int (-1/x) \times x\,dx = [-x\ln x] + \int dx$$
$$= -x\ln x + x$$

Donc $\underline{P(-\ln(x)) = x(1-\ln x) + cte}$.

2) $P = \int \frac{3-x}{x^2-6x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx$ avec

$u = x^2-6x+1$.

Donc $P = -\frac{1}{2}\ln(u) + cte = \underline{-\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+1) + cte}$.

3) $f(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+2-2-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{5}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2}$.

Donc $\underline{P[f(x)] = x - 5\ln(x+2) + cte}$

4) $f(x) = x\cos(x)$

on utilise l'intégration par parties $u = x$ $v' = \cos x$

$u' = 1$ $v = \sin x$.

$$\int x\cos(x)\,dx = [x\sin x] - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

Donc $\underline{P[f(x)] = x\sin x + \cos x + cte}$

B] $y(t) = 1 + (t-1)e^{t-2}$

$$N(t) = \int 1 + (t-1)e^{t-2}\,dt = \int 1\,dt + \int (t-1)e^{t-2}\,dt$$
$$= t + \int (t-1)e^{t-2}\,dt$$

$\int (t-1)e^{t-2}\,dt$ est calculée en utilisant l'intégration par parties.

$u = t-1$ $v' = e^{t-2}$, donc $u' = 1$ et $v = e^{t-2}$

Donc $\int (t-1)e^{t-2}\,dt = (t-1)e^{t-2} - \int e^{(t-2)}\,dt = (t-1)e^{t-2} - e^{t-2}$
$= (t-2)e^{t-2}$

Donc $N(t) = t + (t-2)e^{t-2} + cte$

$N(0) = 0$, donc $0 = -2e^{-2} + cte \Rightarrow cte = 2e^{-2}$ $\Rightarrow \underline{N(t) = t + (t-2)e^{t-2} + 2e^{-2}}$

Donc $N(t) = t + (t-2)\, e^{t-2} + 2e^{-2}$

2) $N(t)$ représente la populat° bactérienne

Si $N(0) = 100$, alors $100 = -2e^{-2} + cte \Leftrightarrow cte = 100 + 2e^{-2}$
$= 100,14$

Donc $N(t) = t + (t-2)\, e^{t-2} + 100,14$

Donc $N(6) = 6 + 4e^4 + 100,14 = 6 + 4 \times 54,6 + 100,14$
$= \underline{324,54}$

Exercice 2

1)
$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) e^{2x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{2x} = \left[-\cos x\, e^{2x}\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, e^{2x} dx$$

$$I = \left[-\cos x\, e^{2x}\right]_0^{\pi/2} + 2\left(\left[\sin x\, e^{2x}\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin x\, e^{2x} dx\right)$$

$$I = 1 + 2\left(e^{\pi} - 2I\right) \Leftrightarrow I = 1 + 2e^{\pi} - 4I \Leftrightarrow 5I = 1 + 2^{e\pi}$$

Donc $I = \underline{\dfrac{1 + 2e^{\pi}}{5}} \simeq 9,48$

2)
$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x^{11})}{2+\sqrt{1+x^4}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}}\, dx + \int_0^1 \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}}$$

$$= -\int_0^{-1} \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}}\, dx + \int_0^1 \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}}$$

$$= -\int_0^1 \frac{\sin(-y^{11}) + (-dy)}{2+\sqrt{1+(-y)^4}} + \int_0^1 \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}}$$

$$= -\int_0^1 \frac{\sin(y^{11})\, dy}{2+\sqrt{1+y^4}} + \int_0^1 \frac{\sin(x^{11})\, dx}{2+\sqrt{1+x^4}} = \underline{\underline{0}}$$

3)
$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} \times \left(-2x e^{-x^2}\right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(-2x e^{-x^2}\right) dx$$

$= -\frac{1}{2} \int_0^1 u' e^u\, dx$ avec $u = -x^2$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq \underline{\underline{0,32}}$$

4) on pose $x = e^y$ (donc $y = \ln x$) ③

$$I = \int_e^3 \frac{dx}{x \ln^3(x)} = \int_1^{\ln(3)} \frac{e^y dy}{e^y y^3} = \int_1^{\ln(3)} \frac{dy}{y^3} = \left[-\frac{1}{2y^2} \right]_1^{\ln 3}$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\ln(3))^2} - 1 \right] \simeq \underline{\underline{0{,}09}}$$