A) $\begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 1x + 0y + (-1)z = 2 \\ 2x + 1y + 1z = 1 \\ -1 \times x + 1y + 1z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc on peut mettre le système sous forme matricielle : $AX = B$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1 \times 1) + (0 \times 1 \times (-1)) + (-1 \times 2 \times 1)$

$- (-1 \times 1 \times (-1)) - (0 \times 2 \times 1) - (1 \times 1 \times 1)$

$= 1 + 0 - 2 - 1 - 0 - 1 = -3$

Det $A \neq 0$, donc la matrice A est inversible, donc on peut écrire

$X = A^{-1} B$, donc il existe une solution au système.

3) Calculons A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times {}^t coA$

coA = matrice des co facteurs de A = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$coA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$^t Co A$ = Transposée de $Co A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{^t Co A}{\det A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & +1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

Donc $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \times 2) + 1/3 + (-1/3 \times 3) \\ (2 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 3) \\ (2 \times -1) + (1/3 \times 1) + (-1/3 \times 2) \end{pmatrix}$

Donc $X = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5 \\ -8/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2/3 \\ y = 5 \\ z = -8/3 \end{cases}}$

B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

La matrice A n'est donc pas inversible.

D'autre part, on voit que l'équation $-x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 3$ peut se transformer en $2x + y + z = -6$

Or, il y a une autre équation $2x + y + z = 1 \neq -6$, donc le système est impossible, donc il n'y a pas de solution.