$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$; $u_0 = -3$ et $v_0 = 7$

1) $w_n = v_n - u_n$

Calculons w_{n+1}.

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) = \frac{2(u_n + 2v_n) - 3(u_n + v_n)}{6}$$

Donc $w_{n+1} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{v_n - u_n}{6} = \frac{1}{6} \times w_n$

Donc w_n est une suite géométrique de raison $1/6$ et dont la limite en $+\infty$ est 0.

$$w_n = w_0 \times (1/6)^n = (v_0 - u_0) \times (1/6)^n = 10 \times (1/6)^n > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$, donc $v_n - u_n > 0$, donc $v_n > u_n$