(1) $]0;+\infty[$ $\quad f(x)=(x+1)\,e^{-1/x}$

a) $f'(x)=e^{-1/x}+\dfrac{(x+1)}{x^2}\,e^{-1/x}=e^{-1/x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)$

b) le signe de $f'(x)$ est déterminé par celui de x^2+x+1

$\Delta=1-4=-3<0$, donc x^2+x+1 est toujours positif, donc la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$ $+\infty$

c) $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty+1=\underline{\underline{+\infty}}$

(2) $\varphi(u)=1-(1+u)\,e^{-u}$

a) $\varphi(u)=-e^{-u}-(1+u)\times(-1)\times e^{-u}=-e^{-u}+e^{-u}+u\,e^{-u}=\underline{\underline{u\,e^{-u}}}$

b) $\forall u\geq 0$, $e^{-u}\leq 1$, donc $0\leq u e^{-u}\leq u\times 1=u$

Donc $0\leq u e^{-u}\leq u \Rightarrow 0\leq \varphi'(u)\leq u$

c) $g(u)=\varphi(u)-\dfrac{u^2}{2}$

$g'(u)=\varphi'(u)-\dfrac{2u}{2}=u e^{-u}-u=u\left(e^{-u}-1\right)$

sur $[0;+\infty[$, $e^{-u}<1$, donc $e^{-u}-1\leq 0$, donc $g'(u)\leq 0$

La fonction $g(u)$ est donc décroissante sur $[0;+\infty[$.

d) $g(u)$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

$g(0)=\varphi(0)-0=0$, donc $g(u)\leq 0$ sur $[0;+\infty[$.

Donc $\varphi(u)-\dfrac{u^2}{2}\leq 0$, donc $\underline{\underline{\varphi(u)\leq \dfrac{u^2}{2}\text{ sur }[0;+\infty[}}$