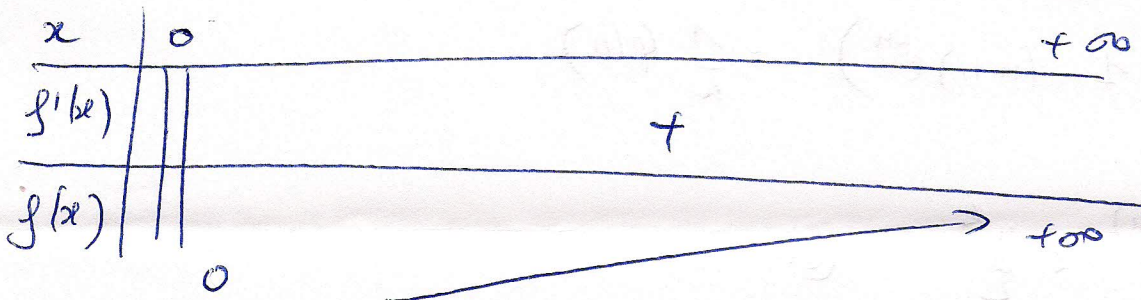


① $]0; +\infty[$ $f(x) = (x+1)e^{-1/x}$ ①

a) $f'(x) = e^{-1/x} + \frac{(x+1)}{x^2} e^{-1/x} = e^{-1/x} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2} \right)$

b) le signe de $f'(x)$ est déterminé par celui de x^2+x+1

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$, donc x^2+x+1 est toujours positif, donc la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 1 = \underline{\underline{+\infty}}$

② $\varphi(u) = 1 - (1+u)e^{-u}$

a) $\varphi'(u) = -e^{-u} - (1+u)(-1)e^{-u} = -e^{-u} + e^{-u} + ue^{-u} = \underline{\underline{ue^{-u}}}$

b) $\forall u > 0, e^{-u} \leq 1$, donc $0 \leq ue^{-u} \leq u \times 1 = u$

Donc $0 \leq ue^{-u} \leq u \Rightarrow 0 \leq \varphi'(u) \leq u$

c) $g(u) = \varphi(u) - \frac{u^2}{2}$

$g'(u) = \varphi'(u) - \frac{2u}{2} = ue^{-u} - u = u(e^{-u} - 1)$

sur $]0; +\infty[$, $e^{-u} < 1$, donc $e^{-u} - 1 \leq 0$, donc $g'(u) \leq 0$

la fonction $g(u)$ est donc décroissante sur $]0; +\infty[$.

d) $g(u)$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

$g(0) = \varphi(0) - 0 = 0$, donc $g(u) \leq 0$ sur $]0; +\infty[$.

Donc $\varphi(u) - \frac{u^2}{2} \leq 0$, donc $\varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$ sur $]0; +\infty[$

