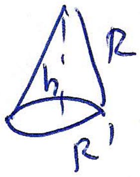
2) Expression du Volume

1) Perimetre de la base du Cône = Perimetre du cercle Conservé $= 2\pi R \times k$

a) Perimetre base Cône $= \underline{2k\pi R}$

b) Perimetre base Cône $= 2\pi k R = 2\pi R'$

$\Leftrightarrow R' = \dfrac{2k\pi R}{2\pi} = \underline{\underline{kR}}$

2) 

D'après le Théorème de Pythagore, $R^2 = h^2 + R'^2$

Donc $h^2 = R^2 - R'^2 = R^2 - k^2R^2 = R^2(1-k^2)$

Donc $\underline{\underline{h = R\sqrt{1-k^2}}}$

3) Volume d'un cône

$$V = \frac{1}{3}\pi R'^2 \times h = \frac{1}{3}\pi\, k^2R^2 \times R \times \sqrt{1-k^2}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^3 \times k^2\sqrt{1-k^2}}$$

3) Partie 1

$V_1(k) = k^2\sqrt{1-k^2}$

1) $V(0)=0$, $V(0,1)=0,009949$ $V(0,2)=0,0391918$ $V(0,3)=0,085854$

$V(0,4)=0,1466$ $V(0,5)=0,2165$ $V(0,6)=0,288$ $V(0,7)=0,349929$

$V(0,8)=0,384$ $V(0,9)=0,35307$ $V(1)=0$

On conjecture que la fonction V_1 est croissante entre 0 et 0,8 approximativement et décroissante entre 0,8 et 1 approximativement.

2) On en déduit du 1) qu'il existe un maximum pour V_1 pour k compris entre 0,8 et 0,9.

3) (a) On trouve $V_{1\,max} \simeq 0,38490$ pour $k = 0,81648$

(b) $k = 0,81648$ $k^2 = 0,6666395904 \simeq 0,66666\ldots = \underline{\underline{2/3}}$

(c) Donc le Maximum $V_{1\,max} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{1-2/3} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}}$

Partie 2

1) on pose $x = h^2$

Cela permet de se débarrasser du carré et on obtient

$V(h) = x\sqrt{1-x}$ qui est une fonction plus simple que $h^2\sqrt{1-h^2}$

2) Oui, il est judicieux de mettre $V(x)$ au carré, car on sait que $V(x)$ est positif, donc $V(x)$ et $V^2(x)$ ont le même sens de variation. De plus, $V(x)^2$ ne possède plus de racine carrée, donc c'est plus simple à gérer.

$$f(x) = x^2(1-x)$$

~~le maximum de f est atteint~~ pour $x = 2/3$

$$f(2/3) - f(x) = \frac{4}{27} - x^2(1-x) = \frac{(3x-2)^2(3x+1)}{27}$$

On en déduit que $f(2/3) - f(x)$ est minimum en $2/3$ et vaut donc 0 et que donc $f(2/3)$ est le maximum de f.