1) $a^{2n+1}+b^{2n+1} = (a+b)\sum_{0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k}$ (1)

Demontrer par récurrence.

α) Pour $n=0$ $(a+b)\sum_{0}^{0}(-1)^k a^k b^{2n-k} = (a+b)\times 1 = a+b$
$= a^{0+1}+b^{0+1}$

Donc c'est vrai au rang $n=0$.

β) Supposons que (1) soit vrai au rang n.
Montrons que c'est vrai au rang $n+1$.

$$(a+b)\sum_{0}^{2(n+1)}(-1)^k a^k b^{\cancel{2n-k}\ 2(n+1)-k}$$

$$=(a+b)\sum_{0}^{2n+2}(-1)^k a^k b^{2n-k+2} = (a+b)b^2\sum_{0}^{2n+2}(-1)^k a^k b^{2n-k}$$

$$=(a+b)b^2\left[\sum_{0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k} + \sum_{2n+1}^{2n+2}(-1)^k a^k b^{2n-k}\right]$$

$$=b^2(a+b)\sum_{0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k} + b^2(a+b)\left[-a^{2n+1}b^{-1}+a^{2n+2}b^{-2}\right]$$

$$=b^2\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)+(a+b)\left[a^{2n+2}-b\,a^{2n+1}\right]$$

$$=\cancel{b^2a^{2n+1}}+b^{2n+3}+a^{2n+3}-\cancel{ba^{2n+2}}+\cancel{ba^{2n+2}}-\cancel{b^2a^{2n+1}}$$

$$=a^{2n+3}+b^{2n+3}$$

$$=a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1}$$

cqfd

Donc (1) est vérifiée.