

4) b) Par récurrence

$$\text{Pour } n=1 \quad F_1 = \prod_0^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5$$

Donc OK.

On suppose maintenant que $F_n = \prod_0^{n-1} F_k + 2$ est vrai.

Démontrons que c'est vrai au rang n .

$$\text{Ainsi } \prod_0^n F_k + 2 = \left(\prod_0^{n-1} F_k + \prod_n^n F_k \right) + 2$$

$$= (F_{n-1}) + F_n + 2$$

$$= F_n^2 - 2F_n + 2$$

$$= F_n^2 - 2F_n + 1 + 1$$

$$= (F_n - 1)^2 + 1$$

$$= F_{n+1} \quad (\text{d'après le 4a)})$$

CGFD