1

A) sur $]0;+\infty[$, $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$

1) $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
x^2-1		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{0} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$

$g(1) = 1$

on en déduit que $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) \geq 1 > 0$

B) sur $]0;+\infty[$ $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0} f = \lim\limits_{0} \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty$, donc C admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

~~Donc Δ: y~~

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{x}{2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$

Donc $\Delta : y = x/2$ est asymptote à C en $+\infty$.

c) $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln(x)}{x} = h(x)$

$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1+\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1/e) \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Donc si $x \leq 1/e$, la courbe C est sous Δ

si $x \geq 1/e$, la courbe C est au dessus de Δ

Donc C et Δ se coupent au point $A(1/e; f(1/e)) = A(1/e; 1/2e)$

3) $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Donc $f'(x) > 0$, donc f est croissante

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Si la tangente T à C est // Δ, cela veut dire que son coefficient directeur est égal à $1/2$. Donc on cherche x_B tel que $f'(x_B) = 1/2$

$f'(x_B) = 1/2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\ln(x_B)}{x_B^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln(x_B)}{x_B^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x_B) = 0 \Leftrightarrow x_B = 1$

Donc le point B a pour coordonnées

$B(1\,;\,f(1)) = B(1\,;\,3/2)$

5) $\lim\limits_{0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur α comprise entre 0 et $+\infty$, telle que $f(\alpha) = 0$

6)