QCM Mathématiques S

1) $\sin x - \sin y = 2\sin((x-y)/2)\cos((x+y)/2)$ car c'est différent des 2 autres a)

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1/n^2 < \pi/2$, donc $\sin(1/n^2) > 0$

Donc $n^2 \sin(1/n^2) > 0$, donc tous les termes de la suite sont positifs. b)

3) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sin(1/h) = \sin(\infty)$

$\sin(\infty)$ n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0. b)

4) $\dfrac{\ln(x^2+2x+1)}{x} = \dfrac{\ln((x+1)^2)}{x} = \dfrac{2\ln(x+1)}{x}$

$= \dfrac{2}{x}\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\right)$

$= 2\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1} + o(x^n)\right)$.

Donc $\lim\limits_{0} \dfrac{\ln(x^2+2x+1)}{x} = 2$ c)

5) $z = x+iy$ $\quad |z+5-i| = |\bar{z} - 4i| \iff |(x+5)+i(y-1)| = |x+i(-y-4)|$

$\iff 1+x-y=0$ cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}(1,1)$

le vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est $(-1,1) = \vec{v}$

La réponse est b) car $\vec{AB}(-5;5)$ est colinéaire à $\vec{v}$.

6) ~~$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$~~

B : ~~l'écuver est français~~ ~~A :~~

$p(B) = \dfrac{60}{200} = \dfrac{30}{100} = 0,3$ b)

7) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+2x+3} - x)(\sqrt{x^2+2x+3} + x)}{\sqrt{x^2+2x+3} + x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2x+3-x^2}{(\sqrt{x^2+2x+3}) + x} = 1$

Donc $y = x+1$ est asymptote à C qd $x \to +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$; $\lim\limits_{-\infty} f(x) + x = \lim\limits_{-\infty} \sqrt{x^2+2x+3} + x$

$= \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3} - x} = -1$, donc $y = -x-1$ est asymptote à C en $-\infty$

Donc a)

8) $\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2} x\sin 2x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{2}\,dx$

$= \left[1/2\, x\sin(2x)\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$

$= \pi/8 - 1/4$ a)

9) $u_n \geq n$ mais on ne sait pas si elle est croissante ou décroissante

Donc c)

10) $u_{n+1} = 4u_n - 6 \Leftrightarrow (u_{n+1} - 2) = 4(u_n - 2)$

On pose $V_n = u_n - 2$, donc $V_{n+1} = 4V_n$, la suite V_n est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -0,5$.

V n'est pas bornée, donc u n'est pas bornée

v ne converge pas, donc u ne converge pas.

Il reste donc le c)

11) $f(x) = x^3\ln^2(x)$

$f'(x) = 3x^2\ln^2(x) + x^3 \times \left(2\frac{\ln(x)}{x}\right) = 3x^2\ln^2(x) + 2x^2\ln(x)$

$f'(e) = 3e^2\ln^2(e) + 2e^2\ln(e) = 3e^2 + 2e^2 = 5e^2$ donc a)

12) $(1-i)^{2008} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)^{2008} = \left(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\right)^{2008} = (\sqrt{2})^{2008} e^{-i\pi/4}$

$= (\sqrt{2})^{2008}(1-i) = 16^{251}(1-i)$ c)

13) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t\,dt = \left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 - (n+1)\times(-1)\times\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$ b)

$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ Donc $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{\sin x} = \lim_0 \frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots + (-1)^n\frac{(2x)^{n+1}}{n+1} + o((2x)^{n+1})}{x - x^3/3! + x^5/5! + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots}$

$= \lim_0 \frac{2 - (2x)^2/2x + \dots + (-1)^n (2x)^{n+1}/(n+1)x + \dots}{1 - x^2/3! + x^4/5! - \dots + (-1)^n x^{2n}/(2n+1)!}$

$= 2$ c)

15) $I = (1+i\sqrt{3})^n = \left(2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n = 2^n \times \left(e^{i\pi/3}\right)^n = 2^n \times e^{in\pi/3}$

$e^{in\pi/3} = \cos(n\pi/3) + i\sin(n\pi/3)$.

Donc pour que I soit réel, il faut que $\sin(n\pi/3) = 0$, donc $n\frac{\pi}{3} = k\pi$

Donc $n = 3k$, donc c)

16) $z = 6 + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0 ; 2\pi[$ donc les angles 0 et 2π sont exclus, donc la réponse est a)

17) le Nombre de podiums où le nageur français est premier est $A_7^2 = \frac{7!}{5!} = 42$
" deuxième $= 42$
" Troisième $= 42$
Donc le Nombre de podiums avec le français est $42 \times 3 = 126$
Donc a)

18) $f(x) = e^{\frac{2x+1}{4x-3}}$
$f'(x) = \left(\frac{2(4x-3) - 4(2x+1)}{(4x-3)^2} \right) \times e^{\frac{2x+1}{4x-3}} = \frac{-7}{(4x-3)^2} \times e^{\frac{2x+1}{4x-3}} = -7e^{\frac{2x+1}{x-3}}(x-3)^{-3}$
Donc a)

19) la fonction est impaire, s'annule en 0 et $\pm 0{,}6$, donc il y a 3 solutions réelles (0, 0.6 et $-0{,}6$) donc a)

20) $\ln(\sqrt{10}+3) + \ln(\sqrt{10}-3) = \ln\left((\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)\right) = \ln(10-9) = \ln(1) = 0$
Donc c)

21) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x} \times \frac{1}{x}\, dx$
$= \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 2/\sqrt{x}\, dx = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - \left[4\sqrt{x}\right]_1^e$
$= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e}$ b)

22) $e^x + 2e^{-x} - 3 > 0 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$ Donc $e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x - 2)(e^x - 1)$
Donc $e^x < 1$ ou $e^x > 2$, donc $x < 0$ ou $x > \ln(2)$
Donc $x \in]-\infty ; 0[\cup]\ln(2) ; +\infty[$ Donc b)

23) La dérivée de f est positive sur D, donc f est croissante sur D.
Donc c)

24) $\lim_{x \to +\infty} (1+2/x)^x = \lim_{+\infty} \exp(x \ln(1+2/x)) = \lim_{+\infty} \exp\left(x\left(\frac{2}{x} - \frac{(4/x)^2}{3} + \dots + (-1)^n \frac{(2/x)^{n+1}}{n+1}\right)\right)$
$= \exp(2) = e^2$
Donc la c)

25) on pose $y = x^2$, on a $3y^2 + 5y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1/3$ ou $y = -2$
Donc $x^2 = 1/3$ ou $x^2 = -2$, donc $x^2 = 1/3$, donc $x = 1/\sqrt{3}$ ou $-1/\sqrt{3}$
Donc 2 solutions a)